



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

A4. α. Σωστό, β. Σωστό, γ. Λάθος, δ. Σωστό, ε. Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

$$B1. w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\frac{z-1}{z+1}} = -\frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$$

$$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{z} - \cancel{z} - 1 = \cancel{z} - 1 - z\bar{z} - \cancel{z} \Leftrightarrow$$

$$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

$$B2. |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z} \quad (1)$$

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \stackrel{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = [2\operatorname{Im}(z)i]^4 = 16 \operatorname{Im}^4(z)i^4 = 16 \operatorname{Im}^4(z) \in \mathbb{R}$$

$$B3. \text{Ισχύουν: } \bar{z}_1 = \frac{1}{z_1} \quad (2) \text{ και } \bar{z}_2 = \frac{1}{z_2} \quad (3)$$

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \stackrel{(2)}{=} \stackrel{(3)}{=} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2 = 4$$

B4.  $w \in I$ , άρα  $w = \beta i$ , με  $\beta \in \mathbb{R}$

Έστω  $u = x + yi$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$

$$u - ui = \frac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x + yi)i = \frac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow$$

$$x + yi - xi + y = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i = \frac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \stackrel{(\ast)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

άρα οι εικόνες του  $u$  ανήκουν στην υπερβολή  $x^2 - y^2 = 1$



Κελάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.**  $x \cdot f(x) + 1 = e^x \Leftrightarrow x \cdot f(x) = e^x - 1$

- Για  $x \neq 0$  είναι  $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- $f(0) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$

Άρα  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

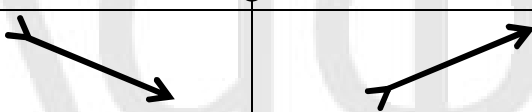
**Γ2.** • Για  $x \neq 0$  είναι  $f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$

Άρα  $f'(x) = \begin{cases} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g$ , με  $g(x) = xe^x - e^x + 1$ , με  $g'(x) = xe^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		$\circ$	
$g$			



$g_{\min} = g(0) = 0$ , άρα  $g(x) > 0$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

Επομένως  $f'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα  $f$  γν. αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα  $f$  "1-1", άρα  $f$  αντιστρέψιμη.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{DL'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} f \uparrow \\ \Rightarrow \end{array}$$

$D_{f^{-1}} = f(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$



$$\Gamma 3. (\varepsilon) : y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Leftrightarrow (\varepsilon) : y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow (\varepsilon) : y = \frac{1}{2}x + 1$$

### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Η  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , άρα η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη  $(\varepsilon)$  με εξαίρεση το σημείο επαφής  $A(0, 1)$ , άρα  $f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \stackrel{2}{\Leftrightarrow} 2f(x) \geq x + 2$  και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

Επομένως η εξίσωση  $2f(x) = x + 2$  έχει ακριβώς μια λύση την  $x = 0$ .

### 2<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ , με  $h(x) = 2f(x) - x - 2, x \in \mathbb{R}$

Είναι  $h'(x) = 2f'(x) - 1, x \in \mathbb{R}$

$$x_1 < x_2 \stackrel{f \text{ κυρτή}}{\Leftrightarrow} \underset{f' \uparrow}{f'(x_1) < f'(x_2)} \Leftrightarrow 2f'(x_1) < 2f'(x_2) \Leftrightarrow$$

$$2f'(x_1) - 1 < 2f'(x_2) - 1 \Leftrightarrow h'(x_1) < h'(x_2)$$

άρα η  $h'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

$$\text{Είναι } h'(0) = 2f'(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0,$$

- $x < 0 \stackrel{h' \uparrow}{\Rightarrow} h'(x) < 0$ , άρα  $h$  γν. φθίνουσα στο  $(-\infty, 0)$
  - $x > 0 \stackrel{h' \uparrow}{\Rightarrow} h'(x) > 0$ , άρα  $h$  γν. αύξουσα στο  $(0, +\infty)$
  - $h(0) = 2f(0) - 2 = 0$
  - $x < 0 \stackrel{h \downarrow}{\Rightarrow} h(x) > 0$
  - $x > 0 \stackrel{h \uparrow}{\Rightarrow} h(x) > 0$
- άρα η  $h(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα το  $0$ .

Επομένως η εξίσωση  $2f(x) = x + 2$  έχει ακριβώς μια λύση την  $x = 0$ .

$$\Gamma 4. \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DL'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(f(x))] \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{\substack{f(x)=1 \\ x \rightarrow 0^+}} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \cdot \ln x \cdot \ln(f(x))] = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln(f(x))] = 0 \cdot 0 = 0$$



**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**  $2f(x) + \left(x + \frac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} \cdot f(t) \left(t + \frac{1}{t}\right) dt + 2, x > 0$  (1)

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x) \left(x + \frac{1}{x}\right)} = \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x) \left(x + \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \Leftrightarrow -2e^{-f(x)}f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\left[2e^{-f(x)}\right]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι  $2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} + c$  (2)

Από την (1) για  $x = 1$  έχουμε :

$$2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \Leftrightarrow f(1) + e^{f(1)} = 1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $S$ , με  $S(x) = x + e^x, x \in \mathbb{R}$

Είναι  $S'(x) = 1 + e^x > 0$ ,

άρα η  $S$  είναι γνησίως αύξουσα

άρα η  $S$  είναι "1-1".

$$f(1) + e^{f(1)} = 1 \Leftrightarrow S(f(1)) = S(0) \stackrel{S^{-1}-1}{\Leftrightarrow} f(1) = 0$$

$$(2) \stackrel{x=1}{\Rightarrow} 2e^{-f(1)} = 2 + c \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} 2 = 2 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$(2) \stackrel{c=0}{\Rightarrow} 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{e^{f(x)}} = \frac{x^2 + 1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{f(x)}}{2} = \frac{x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), x > 0$$

**Δ2.**  $F'(x) = \left( \int_1^x f(t) dt \right)' = f(x), x > 0$

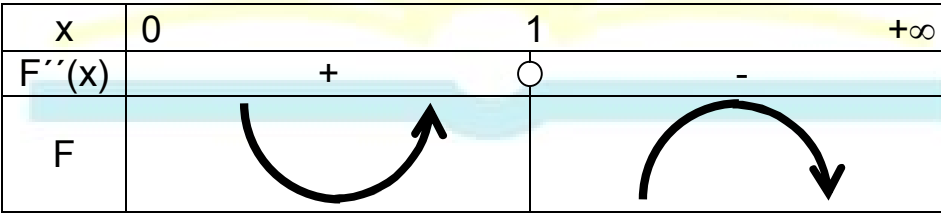
$$F''(x) = f'(x) = \left[ \ln \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right) \right]' = \frac{1}{\frac{2x}{x^2 + 1}} \cdot \left( \frac{2x}{x^2 + 1} \right)'$$

$$= \frac{x^2 + 1}{2x} \cdot \frac{2(x^2 + 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{2x \cdot (x^2 + 1)}$$

$$= \frac{(1 - x)(1 + x)}{x \cdot (x^2 + 1)}, x > 0$$

Το πρόσημο της  $f''$  άρα και την κυρτότητα της  $f$  την καθορίζει ο παράγοντας  $(1 - x)$

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$		○	
F			



σ.κ.

$F(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$ , άρα σημείο καμπής της  $C_F$  το  $\Sigma(1, 0)$

Η  $F$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[1, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει  $\xi \in (1, \beta)$ , τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1} = \lambda_\varepsilon$$

άρα υπάρχει  $\xi \in (1, \beta)$ , τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της  $C_F$  στο σημείο της  $M(\xi, F(\xi))$  είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon)$ .

Είναι  $F''(x) < 0$  στο  $[1, \beta]$ ,

άρα η  $F'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, \beta]$ ,

άρα το  $\xi$  είναι μοναδικό.

**Δ3.** Θεωρούμε συνάρτηση  $\varphi$ , με

$$\varphi(x) = (x - 3)[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)] + (\beta - 1)(x - 1)(x + 1)^3, x \in [1, 3]$$

- Η  $\varphi$  συνεχής στο  $[1, 3]$  ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -2 \cdot [F(\beta) + (1 - \beta) \cdot f(\beta)] < 0$ , διότι

$$1 < \xi < \beta \quad \overset{F' \downarrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} \quad F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta - 1} > f(\beta) \Leftrightarrow$$

$$F(\beta) > (\beta - 1) \cdot f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) + (1 - \beta) \cdot f(\beta) > 0$$

- $\varphi(3) = 128 \cdot (\beta - 1) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in (1, 3)$ ,

τέτοιο ώστε  $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 - 3)[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)] + (\beta - 1)(x_1 - 1)(x_1 + 1)^3 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 - 3 \neq 0 \\ \Leftrightarrow \\ x_1 - 1 \neq 0 \end{matrix}$$

$$\frac{\cancel{(x_1 - 3)}[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]}{(\cancel{x_1 - 3}) \cdot (x_1 - 1)} + \frac{(\beta - 1)\cancel{(x_1 - 1)}(x_1 + 1)^3}{(\cancel{x_1 - 3}) \cdot \cancel{(x_1 - 1)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(\beta) + (1 - \beta) \cdot f(\beta)}{x_1 - 1} + \frac{(\beta - 1) \cdot (x_1 + 1)^3}{x_1 - 3} = 0$$

άρα η εξίσωση  $\frac{F(\beta) + (1 - \beta) \cdot f(\beta)}{x - 1} + \frac{(\beta - 1) \cdot (x + 1)^3}{x - 3} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(1, 3)$ .

**Δ4.** Θα δείξουμε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x \cdot f(u) du \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x \cdot f(t) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt \quad (1)$$

$$\frac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = ux$$

$$dt = x du$$

<b>t</b>	<b>x</b>	<b>x<sup>2</sup></b>
<b>u</b>	<b>1</b>	<b>x</b>

### 1<sup>ος</sup> τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$ ,

$$\text{με } h(x) = x \cdot \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt, \quad x > 0$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left( x \cdot \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt \right)' \\ &= (x)' \cdot \int_1^x f(t) dt + x \cdot \left( \int_1^x f(t) dt \right)' - \left( \int_1^x t \cdot f(t) dt \right)' \\ &= \int_1^x f(t) dt + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_1^x f(t) dt = F(x) \end{aligned}$$

$$f(A) = (-\infty, 0], \text{ άρα } f(x) \leq 0 \Leftrightarrow -f(x) \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για  $x = 1$

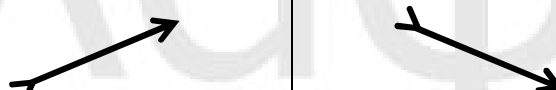
- αν  $0 < x < 1$ , τότε  $\int_x^1 -f(t) dt > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_1^x f(t) dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$$

- αν  $x > 1$ , τότε  $\int_1^x -f(t) dt > 0 \Leftrightarrow$

$$-\int_1^x f(t) dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$$

$x$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h$		○	



$$h_{\max} = h(1) = 0$$

Επομένως για κάθε  $x > 0$  είναι :

$$h(x) \leq 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t \cdot f(t) dt \leq 0 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt$$

## 2<sup>ος</sup> τρόπος

- αν  $0 < x \leq t \leq 1$ , τότε :

$$\left. \begin{array}{l} x - t \leq 0 \\ f(t) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x - t) \cdot f(t) \geq 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha}$$

$$\int_x^1 (x - t) \cdot f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t) dt - \int_x^1 tf(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t) dt \geq \int_x^1 tf(t) dt \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t) dt \geq -\int_1^x tf(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t) dt \leq \int_1^x tf(t) dt$$

- αν  $1 \leq t \leq x$ , τότε :

$$\left. \begin{array}{l} x - t \geq 0 \\ f(t) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (x - t) \cdot f(t) \leq 0 \Leftrightarrow -(x - t) \cdot f(t) \geq 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha}$$

$$\int_1^x -(x - t) \cdot f(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t) dt + \int_1^x tf(t) dt \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t) dt \geq -\int_1^x tf(t) dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t) dt \leq \int_1^x tf(t) dt$$

Επομένως για κάθε  $x > 0$  ισχύει :

$$\int_1^x xf(t) dt \leq \int_1^x tf(t) dt \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t \cdot f(t) dt$$