ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Τετάρτη 6 Σεπτεμβρίου 1972

Ζήτημα 1ο

Έστω ότι ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma = 0$.

α) Οι ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου άρα $\dfrac{2}{\rho_2} = \dfrac{1}{\rho_1} + \dfrac{1}{\rho_3}$ (1)

Επίσης $\begin{cases} \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -3\alpha \ (2), \\ \rho_1 \cdot \rho_2 + \rho_2 \cdot \rho_3 + \rho_1 \cdot \rho_3 = 3\beta \ (3) \\ \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \rho_3 = -\gamma \neq 0 \ (4) \end{cases}$

$$(1) \Rightarrow 2\rho_1 \cdot \rho_3 = \rho_2 \cdot \rho_3 + \rho_1 \cdot \rho_2 \overset{(3)}{\Leftrightarrow} 3\rho_1 \cdot \rho_3 = 3\beta \Leftrightarrow \rho_1 \cdot \rho_3 = \beta \neq 0 \ (5)$$

$$(4) \overset{(5)}{\Rightarrow} \beta \cdot \rho_2 = -\gamma \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow} \rho_2 = -\frac{\gamma}{\beta} \ (6)$$

$$(2) \overset{(6)}{\Rightarrow} \rho_1 - \frac{\gamma}{\beta} + \rho_3 = -3\alpha \Leftrightarrow \rho_1 + \rho_3 = \frac{\gamma}{\beta} - 3\alpha \ (7)$$

$$(3) \Leftrightarrow \rho_2 \cdot (\rho_1 + \rho_3) + \rho_1 \cdot \rho_3 = 3\beta \underset{(7)}{\overset{(5),(6)}{\Rightarrow}} -\frac{\gamma}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\beta} - 3\alpha\right) + \beta = 3\beta \Leftrightarrow$$

$$-\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\gamma - 3\alpha\beta}{\beta} = 2\beta \Leftrightarrow -\gamma^2 + 3\alpha\beta\gamma = 2\beta^3 \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{2\beta^3 + \gamma^2 = 3\alpha\beta\gamma}} \ (8)$$

β) Είναι $\alpha, \beta, \gamma \in IR$, με $\beta > 0$.

Επίσης $\rho_2 = -\dfrac{\gamma}{\beta} \in IR$.

Από (5) και (7) προκύπτει ότι οι ρ_1, ρ_3 είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 3\alpha\right)x + \beta = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{3\alpha\beta - \gamma}{\beta}x + \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 + \frac{3\alpha\beta\gamma - \gamma^2}{\beta\gamma}x + \beta = 0 \overset{(8)}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{2\beta^3}{\beta\gamma}x + \beta = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2\beta^2}{\gamma}x + \beta = 0$$

Πρέπει $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2\beta^2}{\gamma}\right)^2 - 4\beta \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4\beta^4}{\gamma^2} \geq 4\beta \Leftrightarrow 4\beta^4 \geq 4\beta\gamma^2 \overset{\beta \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\boxed{\mathbf{\beta^3 \geq \gamma^2}}$

γ) (8) $\overset{\alpha=2}{\underset{\beta=16}{\Rightarrow}}$ $2\beta^3 + 256 = 96\beta \;\Leftrightarrow\; 2\beta^3 - 96\beta + 256 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\beta^3 - 48\beta + 128 = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta^3 - 16\beta - 32\beta + 128 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\beta(\beta^2 - 16) - 32(\beta - 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; \beta(\beta - 4)(\beta + 4) - 32(\beta - 4) = 0 \;\Leftrightarrow$

$(\beta - 4)\cdot[\beta(\beta + 4) - 32] = 0 \;\Leftrightarrow\; (\beta - 4)\cdot(\beta^2 + 4\beta - 32) = 0 \;\Leftrightarrow$

$(\beta - 4)\cdot(\beta - 4)\cdot(\beta + 8) = 0 \;\Leftrightarrow\; (\beta - 4)^2\cdot(\beta + 8) = 0$

$\beta = 4$ η διπλή ρίζα

Η αρχική εξίσωση για $\alpha = 2, \beta = 4$ και $\gamma = 16$ γίνεται :

$x^3 + 6x^2 + 12x + 16 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 8 = 0 \;\Leftrightarrow$

$(x + 2)^3 + 2^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x + 4)\cdot[(x + 2)^2 - 2(x + 2) + 2^2] = 0 \;\Leftrightarrow$

$(x + 4)\cdot(x^2 - 2x + 4) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + 4 = 0$ ή $x^2 - 2x + 4 = 0 \;\Leftrightarrow$

$\boxed{\mathbf{x = -4 \text{ ή } x = -1 \pm i\sqrt{3}}}$

Ζήτημα 2^o

P (x) και Π (x) πολυώνυμα με βαθμούς ν, μ αντίστοιχα.

Αναγκαία :

Έστω ρ η κοινή ρίζα των P (x) και Π (x), άρα

$$\begin{cases} P(x) = (x - \rho)\cdot P_1(x) \text{ με } \text{βαθμ}P_1(x) = \nu - 1 \\ \Pi(x) = (x - \rho)\cdot \Pi_1(x) \text{ με } \text{βαθμ}\Pi_1(x) = \mu - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} P(x)\cdot\Pi_1(x) = (x - \rho)\cdot P_1(x)\cdot\Pi_1(x) \quad (1) \\ \Pi(x)\cdot P_1(x) = (x - \rho)\cdot P_1(x)\cdot\Pi_1(x) \quad (2) \end{cases}$$

Από (1) και (2) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε

$P(x)\cdot\Pi_1(x) - \Pi(x)\cdot P_1(x) = 0$

Ικανή :

Έστω ότι υπάρχουν δύο μη μηδενικά πολυώνυμα $P_1(x)$ και $\Pi_1(x)$

με βαθμούς το πολύ ν - 1 και το πολύ μ - 1 αντίστοιχα, τέτοια ώστε

$P(x)\cdot\Pi_1(x) - \Pi(x)\cdot P_1(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; P(x)\cdot\Pi_1(x) = \Pi(x)\cdot P_1(x)$

Εάν τα P (x) και Π (x) δεν έχουν κοινή ρίζα, τότε

το P (x) είναι πρώτο προς το Π (x) και θα διαιρεί το $P_1(x)$.

Άτοπο, διότι βαθμP (x) > βαθμ$P_1(x)$

Επομένως τα P (x) και Π (x) έχουν κοινή ρίζα.

Ζήτημα 3ο

α) Η συνάρτηση $f_1(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $(0 , +\infty)$,

άρα η συνάρτηση $f_2(x) = e^x - 1$ είναι συνεχής στο $(0 , +\infty)$

και η συνάρτηση $f_3(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0 , +\infty)$.

Επίσης $f_3(x) = \dfrac{e^x - 1}{x} > 0$, για κάθε $x > 0$.

Η συνάρτηση $f_4(x) = \ell n x$ είναι συνεχής στο $(0 , +\infty)$,

άρα η συνάρτηση $\varphi(x) = (f_4 o f_3)(x) = \ell n \dfrac{e^x - 1}{x}$ είναι συνεχής στο $(0 , +\infty)$

β) Από τη σχέση $\alpha > \varphi(\alpha) > 0$, για $\alpha = x_\nu$ έχουμε :

$x_\nu > \varphi(x_\nu) > 0 \Leftrightarrow x_\nu > x_{\nu+1} > 0$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία x_ν είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από το 0,

άρα συγκλίνει και $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = \xi \geq 0$.

Είναι $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_{\nu+1} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \varphi(x_\nu) \Rightarrow \xi = \varphi(\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu) \Rightarrow \xi = \varphi(\xi)$ (1)

Αν $\xi > 0$, τότε εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. με την $f_1(x) = e^x$ στο $[0 , \xi]$

Υπάρχει $k \in (0 , \xi)$, τέτοιο ώστε $f_1'(k) = \dfrac{f_1(\xi) - f_1(0)}{\xi - 0} \Leftrightarrow$

$e^k = \dfrac{e^\xi - 1}{\xi} \Leftrightarrow k = \ell n \dfrac{e^\xi - 1}{\xi} \Leftrightarrow k = \varphi(\xi) \overset{(1)}{\Rightarrow} k = \xi \to$ ΑΤΟΠΟ

Επομένως $\xi = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{\nu\to\infty} x_\nu = 0$