ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

(ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Πέμπτη 7 Σεπτεμβρίου 1972

Ζήτημα 1ο

$$\begin{aligned}
P(1) &= \alpha\cdot 1^3 + \beta\cdot 1^2 + \gamma\cdot 1 + \delta\\
P(2) &= \alpha\cdot 2^3 + \beta\cdot 2^2 + \gamma\cdot 2 + \delta\\
&\ \ \dots\\
P(\nu) &= \alpha\cdot \nu^3 + \beta\cdot \nu^2 + \gamma\cdot \nu + \delta \qquad (+)
\end{aligned}$$

$$P(1)+P(2)+\dots+P(\nu) = \alpha\cdot(1^3+2^3+\dots+\nu^3) + \beta\cdot(1^2+2^2+\dots+\nu^2) + \gamma\cdot(1+2+\dots+\nu) + \nu\cdot\delta \Leftrightarrow$$

$$\nu^4 = \alpha\cdot\frac{1}{4}\cdot\nu^2\cdot(\nu+1)^2 + \beta\cdot\frac{1}{6}\cdot\nu\cdot(\nu+1)\cdot(2\nu+1) + \gamma\cdot\frac{1}{2}\cdot\nu\cdot(\nu+1) + \nu\cdot\delta \overset{\cdot 12}{\Leftrightarrow}$$

$$12\nu^4 = 3\alpha\nu^2\cdot(\nu^2+2\nu+1) + 2\beta\nu\cdot(2\nu^2+\nu+2\nu+1) + 6\gamma\nu\cdot(\nu+1) + 12\nu\cdot\delta \overset{:\nu}{\Leftrightarrow}$$

$$12\nu^3 = 3\alpha\nu\cdot(\nu^2+2\nu+1) + 2\beta\cdot(2\nu^2+\nu+2\nu+1) + 6\gamma\cdot(\nu+1) + 12\delta \Leftrightarrow$$

$$12\nu^3 = 3\alpha\nu^3 + 6\alpha\nu^2 + 3\alpha\nu + 4\beta\nu^2 + 2\beta\nu + 4\beta\nu + 2\beta + 6\gamma\nu + 6\gamma + 12\delta \Leftrightarrow$$

$$12\nu^3 = 3\alpha\nu^3 + (6\alpha+4\beta)\nu^2 + (3\alpha+6\beta+6\gamma)\nu + (2\beta+6\gamma+12\delta) \quad \text{για κάθε } \nu\in IR$$

$$\begin{cases}3\alpha = 12\\ 6\alpha+4\beta = 0\\ 3\alpha+6\beta+6\gamma = 0\\ 2\beta+6\gamma+12\delta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ 4\beta = -6\alpha\\ 6\gamma = -3\alpha-6\beta\\ 12\delta = -2\beta-6\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ 4\beta = -24\\ 6\gamma = -12-6\beta\\ 6\delta = -\beta-3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ 6\gamma = -12-6\beta\\ 6\delta = 6-3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ 6\gamma = -12+36\\ 6\delta = 6-3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ 6\gamma = 24\\ 6\delta = 6-3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ \gamma = 4\\ 6\delta = 6-3\gamma\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ \gamma = 4\\ 6\delta = 6-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ \gamma = 4\\ 6\delta = -6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = 4\\ \beta = -6\\ \gamma = 4\\ \delta = -1\end{cases}$$

Ζήτημα 2ο

$(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)^2 = (\beta x^2 + \gamma x + \alpha)\cdot(\gamma x^2 + \alpha x + \beta) \Leftrightarrow$

$\alpha^2x^4 + \cancel{\beta^2x^2} + \gamma^2 + 2\alpha\beta x^3 + 2\beta\gamma x + \cancel{2\alpha\gamma x^2} = \beta\gamma x^4 + \alpha\beta x^3 + \cancel{\beta^2x^2} + \gamma^2x^3 + \cancel{\alpha\gamma x^2} + \beta\gamma x + \cancel{\alpha\gamma x^2} + \alpha^2 x + \alpha\beta \Leftrightarrow$

$\alpha^2x^4 + \gamma^2 + 2\alpha\beta x^3 + 2\beta\gamma x - \beta\gamma x^4 - \alpha\beta x^3 - \gamma^2x^3 - \beta\gamma x - \alpha^2x - \alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$

$(\alpha^2 - \beta\gamma)x^4 - (\gamma^2 - \alpha\beta)x^3 - (\alpha^2 - \beta\gamma)x + (\gamma^2 - \alpha\beta) = 0 \Leftrightarrow$

$x^3[(\alpha^2 - \beta\gamma)x - (\gamma^2 - \alpha\beta)] - [(\alpha^2 - \beta\gamma)x - (\gamma^2 - \alpha\beta)] = 0 \Leftrightarrow$

$[(\alpha^2 - \beta\gamma)x - (\gamma^2 - \alpha\beta)]\cdot(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$(x - 1)\cdot(x^2 + x + 1)\cdot[(\alpha^2 - \beta\gamma)x - (\gamma^2 - \alpha\beta)] = 0$

- Αν $\alpha^2 - \beta\gamma \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες τις

$$x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ και } x_4 = \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{\alpha^2 - \beta\gamma}$$

- Αν $\alpha^2 - \beta\gamma = 0$ και $\gamma^2 - \alpha\beta \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες τις x_1, x_2 και x_3.
- Αν $\alpha^2 - \beta\gamma = \gamma^2 - \alpha\beta = 0$, τότε η εξίσωση έχει ρίζα οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό.

Ζήτημα 3ο

1η λύση

$$|\varphi(x)| = \left|\frac{x}{1 + |x|}\right| = \frac{|x|}{1 + |x|} < 1, \text{ άρα } -1 < \varphi(x) < 1.$$

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $k \in (-1, 1)$, η εξίσωση $\varphi(x) = k$ έχει λύση.

Αν $-1 < k < 0$: $\varphi(x) = k \Leftrightarrow \dfrac{x}{1 + |x|} = k \overset{k<0}{\underset{x<0}{\Rightarrow}} \dfrac{x}{1 - x} = k \Leftrightarrow x = k - kx \Leftrightarrow$

$$x + kx = k \Leftrightarrow (1 + k)x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{1 + k}$$

Αν $0 \leq k < 1$: $\varphi(x) = k \Leftrightarrow \dfrac{x}{1 + |x|} = k \overset{k \geq 0}{\underset{x \geq 0}{\Rightarrow}} \dfrac{x}{1 + x} = k \Leftrightarrow x = k + kx \Leftrightarrow$

$$x - kx = k \Leftrightarrow (1 - k)x = k \Leftrightarrow x = \frac{k}{1 - k}$$

Επομένως το σύνολο τιμών της φ είναι το $(-1, 1)$.

Έστω $x_1 < x_2$.

Θα δείξουμε ότι $\varphi(x_1) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{x_1}{1 + |x_1|} < \dfrac{x_2}{1 + |x_2|} \Leftrightarrow x_1 + x_1|x_2| < x_2 + x_2|x_1|$ (1)

- Αν $x_1 < x_2 \leq 0$: (1) $\Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 < x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ που ισχύει
- Αν $x_1 < 0 < x_2$: (1) $\Leftrightarrow x_1 + x_1x_2 < x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1x_2 < x_2 - x_1$ που ισχύει
- Αν $0 \leq x_1 < x_2$: (1) $\Leftrightarrow x_1 + x_1x_2 < x_2 + x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ που ισχύει

Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$2^η$ λύση

$$\varphi(x) = \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x<0 \\ \dfrac{x}{1+x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$x<0 : \varphi'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1-x) - x\cdot(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

$$x \geq 0 : \varphi'(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{(x)'\cdot(1+x) - x\cdot(1+x)'}{(1+x)^2} = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

Σε κάθε περίπτωση είναι $\varphi'(x) > 0$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{1-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = 1$$

Επομένως το σύνολο τιμών της φ είναι το $(-1\ ,\ 1)$.