ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Τετάρτη 13 Σεπτεμβρίου 1972

Ζήτημα 1^{o}

Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 12$ έχει $\Delta = 57$ και ρίζες $x_1 = \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{2}$ και $x_2 = \dfrac{-3 - \sqrt{57}}{2}$

άρα το πεδίο ορισμού της φ είναι το $A = IR - \left\{\dfrac{-3 - \sqrt{57}}{2}, \dfrac{-3 + \sqrt{57}}{2}\right\}$

Το τριώνυμο $x^2 - 2x - 9$ έχει $\Delta = 40$ και ρίζες $x_3 = 1 + \sqrt{10}$ και $x_4 = 1 - \sqrt{10}$

άρα το πεδίο ορισμού της σ είναι το $B = IR - \left\{1 + \sqrt{10}\ ,\ 1 - \sqrt{10}\right\}$

$$\varphi(x) = \sigma(x) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x - 8}{x^2 + 3x - 12} = \frac{x^2 - 2x - 6}{x^2 - 2x - 9} \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 3x - 8)\cdot(x^2 - 2x - 9) = (x^2 + 3x - 12)\cdot(x^2 - 2x - 6) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{x^4}\ \cancel{-2x^3} - 9x^2 + \cancel{3x^3}\ \cancel{-6x^2} - 27x - 8x^2 + 16x + \cancel{72} = \cancel{x^4}\ \cancel{-2x^3} - 6x^2 + \cancel{3x^3}\ \cancel{-6x^2} - 18x - 12x^2 + 24x + \cancel{72} \Leftrightarrow$$

$$-17x^2 - 11x = -18x^2 + 6x \Leftrightarrow x^2 - 17x = 0 \Leftrightarrow x(x - 17) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\mathbf{x = 0 \text{ ή } x = 17}}_{\text{δεκτές}}$$

Ζήτημα 2^{o}

Για να έχει η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - 2(\lambda - 3)x + \lambda + 1 = 0$ δύο ρίζες θετικές πρέπει :

- $\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 1$ (1)
- $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow [-2(\lambda - 3)]^2 - 4(\lambda - 1)(\lambda + 1) \geq 0 \Leftrightarrow 4(\lambda - 3)^2 - 4(\lambda^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$

  $\lambda^2 - 6\lambda + 9 - \lambda^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -6\lambda \geq -10 \Leftrightarrow \lambda \leq \dfrac{5}{3}$ (2)
- $S > 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(\lambda - 3)}{\lambda - 1} > 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1$ ή $\lambda > 3$ (3)
- $P > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda + 1}{\lambda - 1} > 0 \Rightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -1$ ή $\lambda > 1$ (4)

Από (1), (2), (3) και (4) προκύπτει ότι $\boldsymbol{\lambda < -1}$

Ζήτημα 3ο

Οι συντεταγμένες των Α, Β, Γ επαληθεύουν την εξίσωση της καμπύλης

- Για $x = 1$ και $y = 0$: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (1)
- Για $x = 2$ και $y = -3$: $4\alpha + 2\beta + \gamma = -3$ (2)
- Για $x = -1$ και $y = 12$: $\alpha - \beta + \gamma = 12$ (3)

Από (1) και (3) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $2\beta = -12 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\beta = -6}$

Η (1) και η (3) για $\beta = -6$ δίνουν $\alpha + \gamma = 6$ (4)

Η (2) για $\beta = -6$ δίνει $4\alpha + \gamma = 9$ (5)

Από (4) και (5) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε $-3\alpha = -3 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 1}$

Η (4) για $\alpha = 1$ δίνει $\boldsymbol{\gamma = 5}$

Για $\alpha = 1$, $\beta = -6$ και $\gamma = 5$ η καμπύλη έχει εξίσωση $y = x^2 - 6x + 5$

Είναι μια παραβολή με άξονα συμμετρίας παράλληλο στον άξονα y΄y.

Η κορυφή της Κ έχει τετμημένη $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = 3$

και τεταγμένη $y = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$

δηλαδή Κ (3 , -4).