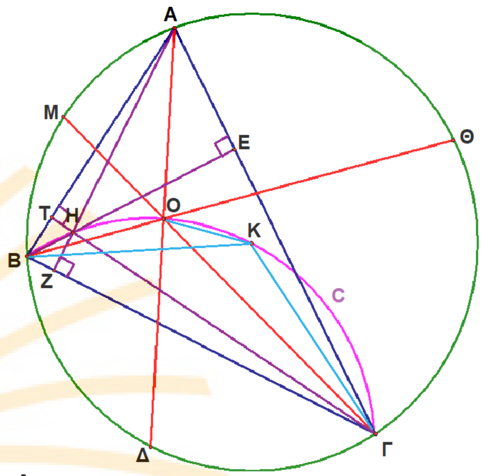
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Παρασκευή 15 Σεπτεμβρίου 1972
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1^{o}

Έστω ότι $\hat{B} > 60^0$.



Οι ΑΔ, ΒΘ, ΓΜ διχοτόμοι των $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα τέμνονται στο Ο (κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου) και τα ΑΖ, ΒΕ, ΓΤ είναι τα ύψη του τριγώνου.

$\hat{A} = 60^0$, άρα $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^0$ ή $\hat{\Gamma} = 120^0 - \hat{B}$ (1)

$\overset{\triangle}{B\Gamma K}$: $B\hat{K}\Gamma = 2\hat{A} = 120^0$ και $K\hat{B}\Gamma = K\hat{\Gamma}B = 30^0$

$$O\hat{B}K = O\hat{B}\Gamma - K\hat{B}\Gamma = \frac{\hat{B}}{2} - 30^0$$

$$O\hat{\Gamma}K = K\hat{\Gamma}B - O\hat{\Gamma}B = 30^0 - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \overset{(1)}{=} 30^0 - \frac{120^0 - \hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} - 30^0$$

$$O\hat{B}H = H\hat{B}\Gamma - O\hat{B}\Gamma = 90^0 - \hat{\Gamma} - \frac{\hat{B}}{2} \overset{(1)}{=} = 90^0 - (120^0 - \hat{B}) - \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}}{2} - 30^0$$

$$O\hat{\Gamma}H = O\hat{\Gamma}B - H\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{\Gamma}}{2} - (90^0 - \hat{B}) \overset{(1)}{=} \frac{120^0 - \hat{B}}{2} - 90^0 + \hat{B} = \frac{\hat{B}}{2} - 30^0$$

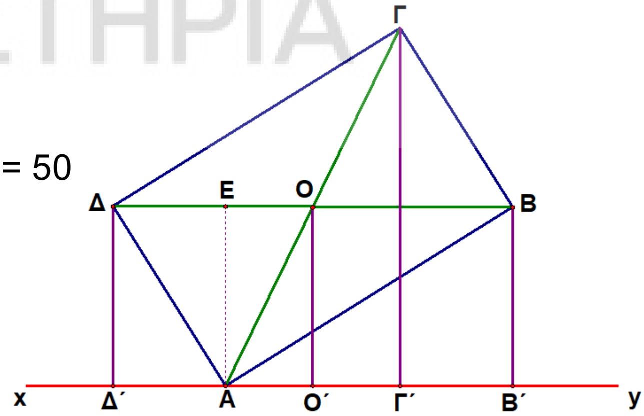
Επομένως $O\hat{B}K = O\hat{\Gamma}K = O\hat{B}H = O\hat{\Gamma}H$,

δηλαδή τα σημεία Ο, Κ, Β, Γ και Η ανήκουν σε περιφέρεια κύκλου (C).

Επίσης $O\hat{\Gamma}K = O\hat{B}H$ εγγεγραμμένες στον κύκλο C, άρα

οι αντίστοιχες χορδές είναι ίσες ΟΚ = ΟΗ, δηλαδή το $\overset{\triangle}{HOK}$ είναι ισοσκελές.

Ζήτημα 2^{o}



Στο ορθογώνιο $\overset{\triangle}{AB\Delta}$:

$\Delta B^2 = AB^2 + A\Delta^2 = 30^2 + 40^2 = 2500$, άρα $\Delta B = 50$

Το ΑΕ είναι ύψος, άρα $\Delta B \cdot AE = AB \cdot A\Delta \Rightarrow$

$50 \cdot AE = 30 \cdot 40 \Rightarrow AE = 24 \Rightarrow OO΄ = 24$

1^{ος} τρόπος

Από θεώρημα του Πάππου

$V = 2\pi \cdot OO΄ \cdot (AB\Gamma\Delta) = 2\pi \cdot 24 \cdot (30 \cdot 40) = 57600\pi \text{ cm}^3$

$2^{ος}$ τρόπος

Β΄, Γ΄, Δ΄, Ο΄ είναι οι προβολές των Β, Γ, Δ, Ο στην ευθεία xy αντίστοιχα. Τα τραπέζια Δ΄ΔΓΓ΄ και Γ΄ΓΒΒ΄ κατά την περιστροφή τους περί της ευθείας xy παράγουν κόλουρους κώνους, ενώ τα τρίγωνα ΔΔΆ και ΑΒΒ΄ παράγουν κώνους.

Ο ζητούμενος όγκος V είναι :

$V = V(Δ'ΔΓΓ') + V(Γ'ΓΒΒ') - V(ΔΔ'Α) - V(ΑΒΒ')$

$V(Δ'ΔΓΓ') = \frac{1}{3}\cdot π\cdot(ΔΔ'^2 + ΔΔ'\cdot ΓΓ' + ΓΓ'^2)\cdot Γ'Δ'$

$V(Γ'ΓΒΒ') = \frac{1}{3}\cdot π\cdot(ΒΒ'^2 + ΒΒ'\cdot ΓΓ' + ΓΓ'^2)\cdot Β'Γ' = \frac{1}{3}\cdot π\cdot(ΔΔ'^2 + ΔΔ'\cdot ΓΓ' + ΓΓ'^2)\cdot Β'Γ'$

$V(ΔΔ'Α) = \frac{1}{3}\cdot π\cdot ΔΔ'^2\cdot ΑΔ'$

$V(ΑΒΒ') = \frac{1}{3}\cdot π\cdot ΒΒ'^2\cdot ΑΒ' = \frac{1}{3}\cdot π\cdot ΔΔ'^2\cdot ΑΒ'$

Είναι ΒΒ΄ = ΑΕ = ΟΟ΄ = ΔΔ΄ = 24 cm και Δ΄Β΄ = ΔΒ = 50 cm

Επίσης $ΓΓ' = 2\cdot ΟΟ' = 2\cdot 24 = 48$ cm

$$V=\frac{1}{3}\cdot π\cdot(ΔΔ'^2+ΔΔ'\cdot ΓΓ'+ΓΓ'^2)\cdot Γ'Δ' + \frac{1}{3}\cdot π\cdot(ΔΔ'^2+ΔΔ'\cdot ΓΓ'+ΓΓ'^2)\cdot Β'Γ' - \frac{1}{3}\cdot π\cdot ΔΔ'^2\cdot ΑΔ' - \frac{1}{3}\cdot π\cdot ΔΔ'^2\cdot ΑΒ'$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot\left(ΔΔ'^2\cdot Γ'Δ'+ΔΔ'\cdot ΓΓ'\cdot Γ'Δ'+ΓΓ'^2\cdot Γ'Δ'+ΔΔ'^2\cdot Β'Γ'+ΔΔ'\cdot ΓΓ'\cdot Β'Γ'+ΓΓ'^2\cdot Β'Γ'-ΔΔ'^2\cdot ΑΔ'-ΔΔ'^2\cdot ΑΒ'\right)$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot\left[ΔΔ'^2\cdot(Γ'Δ'-ΑΔ'-ΑΒ'+Β'Γ') + ΓΓ'^2\cdot(Γ'Δ'+Β'Γ') + ΓΓ'\cdot ΔΔ'(Γ'Δ'+Β'Γ')\right]$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot\left[ΔΔ'^2\cdot(Β'Δ'-Β'Δ') + ΓΓ'^2\cdot Δ'Β' + ΓΓ'\cdot ΔΔ'\cdot Δ'Β'\right]$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot ΓΓ'\cdot Δ'Β'\cdot(ΓΓ'+ΔΔ')$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot 48\cdot 50\cdot(48+24)$$

$$=\frac{1}{3}π\cdot 2400\cdot 72$$

$$=57600π\ cm^3$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

$$ημ^2α = \frac{3 + 2εφ^2β}{1 + 5εφ^2β} \Leftrightarrow ημ^2α = \frac{3 + 2\left(\frac{ημβ}{συνβ}\right)^2}{1 + 5\left(\frac{ημβ}{συνβ}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$ημ^2α = \frac{3 + 2\frac{ημ^2β}{συν^2β}}{1 + 5\frac{ημ^2β}{συν^2β}} \Leftrightarrow ημ^2α = \frac{\frac{3συν^2β + 2ημ^2β}{συν^2β}}{\frac{συν^2β + 5ημ^2β}{συν^2β}} \Leftrightarrow$$

$$ημ^2α = \frac{3συν^2β + 2ημ^2β}{συν^2β + 5ημ^2β} \Leftrightarrow ημ^2α = \frac{3(1 - ημ^2β) + 2ημ^2β}{1 - ημ^2β + 5ημ^2β} \Leftrightarrow$$

$$ημ^2α = \frac{3 - 3ημ^2β + 2ημ^2β}{1 + 4ημ^2β} \Leftrightarrow \frac{εφ^2α}{1 + εφ^2α} = \frac{3 - ημ^2β}{1 + 4ημ^2β} \Leftrightarrow$$

$$εφ^2α + 4εφ^2αημ^2β = 3 - ημ^2β + 3εφ^2α - εφ^2αημ^2β \Leftrightarrow$$

$$ημ^2β + 5εφ^2αημ^2β = 3 + 2εφ^2α \Leftrightarrow$$

$$ημ^2β(1 + 5εφ^2α) = 3 + 2εφ^2α \Leftrightarrow ημ^2β = \frac{3 + 2εφ^2α}{1 + 5εφ^2α}$$

Ζήτημα 2ο

- $2β = α + γ \Leftrightarrow 2αημΒ = α + ασυνΒ \Leftrightarrow 2ημΒ = 1 + συνΒ \Leftrightarrow$

  $2ημΒ - 1 = συνΒ \Rightarrow (2ημΒ - 1)^2 = συν^2Β \Leftrightarrow$

  $4ημ^2Β - 4ημΒ + 1 = 1 - ημ^2Β \Leftrightarrow 5ημ^2Β - 4ημΒ = 0 \Leftrightarrow$

  $ημΒ \cdot (5ημΒ - 4) = 0 \overset{ημΒ \neq 0}{\Rightarrow} 5ημΒ - 4 = 0 \Leftrightarrow 5ημΒ = 4 \Leftrightarrow ημΒ = \frac{4}{5}$

- $συνΒ = \sqrt{1 - ημ^2Β} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

- $εφΒ = \frac{ημΒ}{συνΒ} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$
- $σφΒ = \frac{1}{εφΒ} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$
- $ημΓ = συνΒ = \frac{3}{5}$
- $συνΓ = ημΒ = \frac{4}{5}$
- $εφΓ = σφΒ = \frac{3}{4}$
- $σφΓ = εφΒ = \frac{4}{3}$