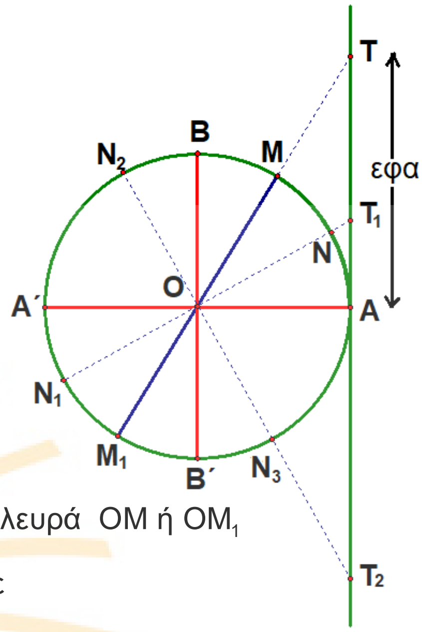
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
(ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Τρίτη 5 Σεπτεμβρίου 1972



Ζήτημα 1ο

$$εφα = \frac{2εφ\frac{α}{2}}{1 - εφ^2\frac{α}{2}} \Leftrightarrow εφα\cdot εφ^2\frac{α}{2} + 2εφ\frac{α}{2} - εφα = 0$$

- Αν $εφα = 0$, τότε $εφ\frac{α}{2} = 0$.
- Αν $εφα \neq 0$, τότε για την $εφ\frac{α}{2}$ έχουμε δύο λύσεις

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα} \text{ και } x_2 = \frac{1 - \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}, \text{ με } x_1\cdot x_2 = -1$$

Σε κάθε τιμή της $εφα=(ΑΤ)$, αντιστοιχούν οι γωνίες με τελική πλευρά $ΟΜ$ ή $ΟΜ_1$

Αν $θ = \hat{AOM}$ είναι η ελάχιστη θετική γωνία με $εφθ = εφα$, τότε

$α = θ + κπ$ και $\frac{α}{2} = \frac{θ}{2} + κ\frac{π}{2}, κ \in Z$.

▹ Αν $κ = 2ν, ν \in Z$, τότε $\frac{α}{2} = \frac{θ}{2} + νπ, ν \in Z$

Οι γωνίες $\frac{α}{2}$ έχουν τελικές πλευρές $ΟΝ$ ή $ΟΝ_1$ και $εφ\frac{α}{2} = (ΑΤ_1)$

▹ Αν $κ = 2ν + 1, ν \in Z$, τότε $\frac{α}{2} = \frac{θ}{2} + \frac{π}{2} + νπ, ν \in Z$

Οι γωνίες $\frac{α}{2}$ έχουν τελικές πλευρές $ΟΝ_2$ ή $ΟΝ_3$ και $εφ\frac{α}{2} = -(ΑΤ_2)$

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΟΤ_1Τ_2$ είναι $(ΑΤ_1)\cdot(ΑΤ_2) = (ΟΑ)^2 = 1$, άρα $x_1\cdot x_2 = -1$.

- Αν $0 < α < \frac{π}{2}$, τότε είναι $εφα > 0$, $εφ\frac{α}{2} > 0$, οπότε $εφ\frac{α}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}$
- Αν $\frac{π}{2} < α < π$, τότε $\frac{π}{4} < \frac{α}{2} < \frac{π}{2}$ και είναι $εφα < 0$, $εφ\frac{α}{2} > 0$,

οπότε $εφ\frac{α}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}$

- Αν $π < α < \frac{3π}{2}$, τότε $\frac{π}{2} < \frac{α}{2} < \frac{3π}{4}$ και είναι $εφα > 0$, $εφ\frac{α}{2} < 0$,

οπότε $εφ\frac{α}{2} = \frac{1 - \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}$

- Αν $\frac{3π}{2} < α < 2π$, τότε $\frac{3π}{4} < \frac{α}{2} < π$ και είναι $εφα < 0$, $εφ\frac{α}{2} < 0$,

οπότε $εφ\frac{α}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + εφ^2α}}{εφα}$

Ζήτημα 2ο

α) $$ημA + ημB + ημΓ = 2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2} + ημ(A+B)$$
$$= 2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A-B}{2} + 2ημ\frac{A+B}{2}συν\frac{A+B}{2}$$
$$= 2ημ\frac{A+B}{2}\cdot\left(συν\frac{A-B}{2} + συν\frac{A+B}{2}\right)$$
$$= 2ημ\left(\frac{π}{2} - \frac{Γ}{2}\right)\cdot 2συν\frac{\frac{A-B}{2}+\frac{A+B}{2}}{2}\cdot συν\frac{\frac{A-B}{2}-\frac{A+B}{2}}{2}$$
$$= 4συν\frac{Γ}{2}\cdot συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{-B}{2}$$
$$= 4συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{B}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2}$$

β) $$\sqrt{αημA} + \sqrt{βημB} + \sqrt{γημΓ} = \sqrt{2Rημ^2A} + \sqrt{2Rημ^2B} + \sqrt{2Rημ^2Γ}$$
$$= \sqrt{2R}\cdot ημA + \sqrt{2R}\cdot ημB + \sqrt{2R}\cdot ημΓ$$
$$= \sqrt{2R}\cdot(ημA + ημB + ημΓ)$$
$$= \sqrt{2R\cdot(ημA + ημB + ημΓ)^2}$$
$$= \sqrt{2R\cdot(ημA + ημB + ημΓ)\cdot(ημA + ημB + ημΓ)}$$
$$= \sqrt{(2RημA + 2RημB + 2RημΓ)\cdot 4συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{B}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2}}$$
$$= 2\sqrt{(α+β+γ)\cdot συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{B}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2}}$$

Ζήτημα 3ο

$$2συν^2A = συν^2B + συν^2Γ \Leftrightarrow$$
$$1 + συν2A = \frac{1+συν2B}{2} + \frac{1+συν2Γ}{2} \Leftrightarrow$$
$$1 + συν2A = 1 + \frac{συν2B + συν2Γ}{2} \Leftrightarrow$$
$$συν2A = \frac{2συν(B+Γ)\cdot συν(B-Γ)}{2} \Leftrightarrow$$
$$συν2A = συν(B+Γ)\cdot συν(B-Γ) \Leftrightarrow$$
$$συν2A = -συνA\cdot συν(B-Γ)$$

- Αν $A = \frac{π}{2}$, τότε $-1 = 0$ (άτοπο)
- Αν $A \neq \frac{π}{2}$, τότε $συν(B-Γ) = -\frac{συν2A}{συνA}$

Είναι $0 < B - \Gamma < B + \Gamma \Rightarrow 1 > συν(B - \Gamma) > συν(B + \Gamma) \Leftrightarrow$

$1 > -\dfrac{συν2A}{συνA} > -συνA \Leftrightarrow \left(\dfrac{συν2A}{συνA} - συνA < 0 \text{ και } 1 + \dfrac{συν2A}{συνA} > 0\right) \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{2συν^2A - 1}{συνA} - συνA < 0 \text{ και } \dfrac{συνA + συν2A}{συνA} > 0\right) \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{συν^2A - 1}{συνA} < 0 \text{ και } \dfrac{συνA + συν2A}{συνA} > 0\right)$

Είναι $συν^2A - 1 < 0 \Rightarrow συνA > 0 \Rightarrow συνA + συν2A > 0 \Leftrightarrow 2συν\dfrac{3A}{2}συν\dfrac{A}{2} > 0$

Είναι $συνA > 0 \Rightarrow συν\dfrac{A}{2} > 0 \Rightarrow συν\dfrac{3A}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{3A}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathbf{A < \dfrac{\pi}{3}}$

δηλαδή το πρόβλημα έχει λύση μόνο όταν $0 < A < \dfrac{\pi}{3}$.

$συν(B - \Gamma) = -\dfrac{συν2A}{συνA} \Rightarrow B - \Gamma = τοξσυν\left(-\dfrac{συν2A}{συνA}\right) = μ$ (ακτίνια)

Είναι $\begin{cases} B + \Gamma = \pi - A \\ B - \Gamma = μ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2B = \pi - A + μ \\ \Gamma = B - μ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\pi - A + μ}{2} \\ \Gamma = B - μ \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} B = \dfrac{\pi - A + μ}{2} \\ \Gamma = \dfrac{\pi - A + μ}{2} - μ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = \dfrac{\pi - A + μ}{2} \\ \Gamma = \dfrac{\pi - A - μ}{2} \end{cases}$