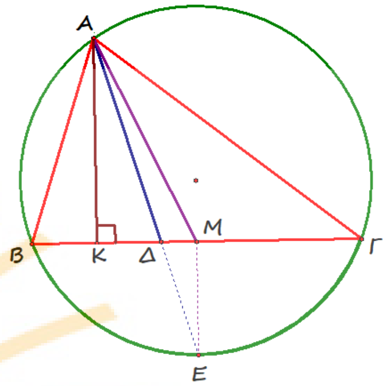
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1972
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Δευτέρα 11 Σεπτεμβρίου 1972

Ζήτημα 1ο

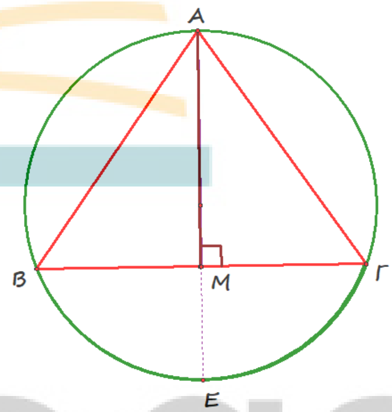
1η περίπτωση: ΑΒ $\neq$ ΑΓ



Φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΓ}}$,

το ύψος ΑΚ και τη διχοτόμο ΑΔ της $\text{Β}\overset{\wedge}{\text{Α}}\text{Γ}$,
η οποία τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε.
Αν Μ μέσο της ΒΓ, τότε ΕΜ $\perp$ ΒΓ.
Τα κάθετα προς τη ΒΓ τμήματα ΑΚ και ΕΜ
βρίσκονται εκατέρωθεν της ΑΕ, δηλαδή
η διχοτόμος ΑΔ βρίσκεται πάντα μεταξύ
του ύψους ΑΚ και της διαμέσου ΑΜ.
Είναι ΚΔ < ΚΜ, άρα ΑΔ < ΑΜ

2η περίπτωση: ΑΒ = ΑΓ



Η διάμεσος ΑΜ, το ύψος ΑΚ και η διχοτόμος ΑΔ
συμπίπτουν, άρα ΑΔ = ΑΜ

Σε κάθε περίπτωση $\delta_\alpha \leq \mu_\alpha \Leftrightarrow \delta_\alpha{}^2 \leq \mu_\alpha{}^2$ (1)

Όμοια αποδεικνύεται ότι $\delta_\beta{}^2 \leq \mu_\beta{}^2$ (2) και $\delta_\gamma{}^2 \leq \mu_\gamma{}^2$ (3)

Από (1), (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε :

$$\delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 \leq \mu_\alpha{}^2 + \mu_\beta{}^2 + \mu_\gamma{}^2 \Leftrightarrow$$

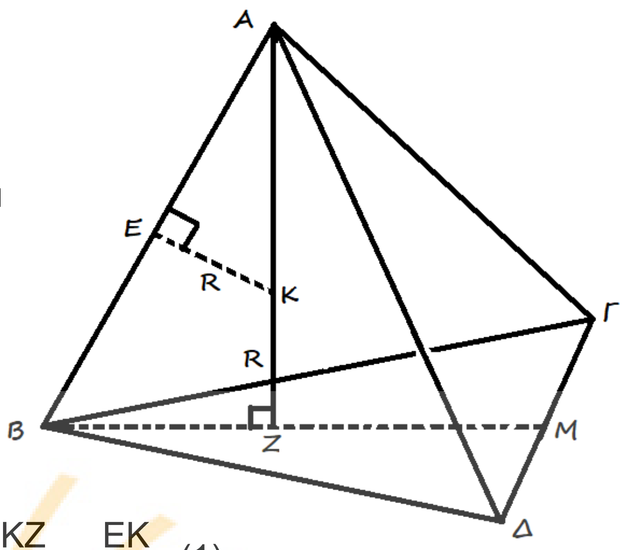
$$\delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 \leq \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} + \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 \leq \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2 + 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 \leq \frac{3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\delta_\alpha{}^2 + \delta_\beta{}^2 + \delta_\gamma{}^2 \leq \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Ζήτημα 2ο



Έστω ότι :

- Κ το κέντρο της σφαίρας που περιγράφεται
- R η ακτίνα της σφαίρας
- ΑΖ το ύψος του τετράεδρου
- $KE \perp AB$

Είναι $A\hat{E}K = A\hat{Z}B = 90^0$ και $K\hat{A}E = B\hat{A}Z$

άρα $A\overset{\Delta}{E}K \sim A\overset{\Delta}{Z}B$ και $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{EK}{ZB} \Leftrightarrow \dfrac{AZ - KZ}{AB} = \dfrac{EK}{ZB}$ (1)

$EK = KZ = R$ (2)

$BM = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $ZB = \dfrac{2}{3}BM = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$ (3)

Π.Θ. στο $Z\overset{\Delta}{A}B$: $AZ^2 = AB^2 - BZ^2 = \alpha^2 - \left(\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{6\alpha^2}{9}$,

άρα $AZ = \sqrt{\dfrac{6\alpha^2}{9}} = \dfrac{\alpha\sqrt{6}}{3}$ (4)

$$(1) \underset{(4)}{\overset{(2),(3)}{\Rightarrow}} \frac{\frac{\alpha\sqrt{6}}{3} - R}{\cancel{\alpha}} = \frac{R}{\frac{\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{3}} \Leftrightarrow \frac{3\alpha\sqrt{2}}{9} - \frac{R\sqrt{3}}{3} = R \Leftrightarrow \frac{\alpha\sqrt{2}}{3} - \frac{R\sqrt{3}}{3} = R \Leftrightarrow$$

$$\alpha\sqrt{2} - R\sqrt{3} = 3R \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2} = R\sqrt{3} + 3R \Leftrightarrow \alpha\sqrt{2} = (\sqrt{3} + 3)R \Leftrightarrow$$

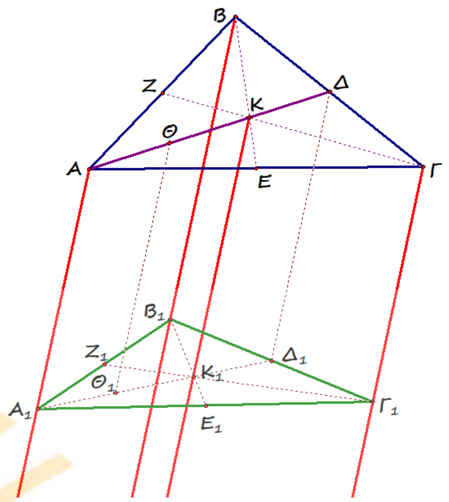
$$R = \frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 3} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3)}{(\sqrt{3} + 3)(\sqrt{3} - 3)} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3)}{6}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi\left[\frac{\alpha\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3)}{6}\right]^3 \Leftrightarrow V = \frac{4}{3}\pi\frac{\alpha^3\cdot 2\sqrt{2}(\sqrt{3} - 3)^3}{216} \Leftrightarrow$$

$$V = \frac{\sqrt{2}\cdot(54 - 30\sqrt{3})}{81}\pi\alpha^3 \Leftrightarrow V = \frac{6\sqrt{2}\cdot(9 - 5\sqrt{3})}{81}\pi\alpha^3 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\mathbf{V = \frac{2\sqrt{2}\cdot(9 - 5\sqrt{3})}{27}\pi\alpha^3}}$$

Ζήτημα 3^o



Έστω K το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{A B \Gamma}$.
Από το K φέρνουμε ημιευθεία παράλληλη στις AA_1, BB_1, $\Gamma\Gamma_1$ η οποία τέμνει το επιπεδο $A_1B_1\Gamma_1$ στο K_1 που είναι το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{A_1B_1\Gamma_1}$.
Στη διάμεσο $A\Delta$ παίρνω Θ μέσο του AK και στη διάμεσο $A\Delta_1$ παίρνω Θ_1 μέσο του A_1K_1.
Στα τραπέζια AA_1K_1K, $\Theta\Theta_1\Delta_1\Delta$ και $BB_1\Gamma_1\Gamma$ οι $\Theta\Theta_1$, KK_1 και $\Delta\Delta_1$ αντίστοιχα είναι διάμεσοι, άρα

$2\Theta\Theta_1 = AA_1 + KK_1$ (1),

$2KK_1 = \Theta\Theta_1 + \Delta\Delta_1$ (2) και

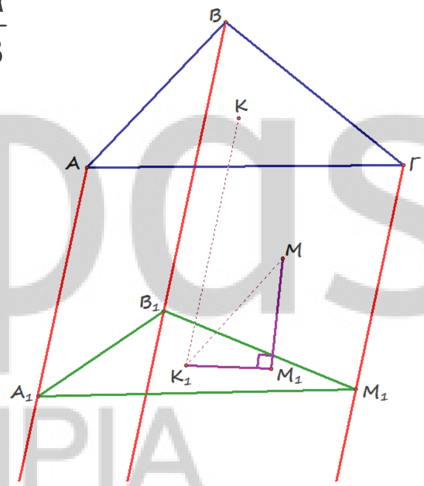
$2\Delta\Delta_1 = BB_1 + \Gamma\Gamma_1$ (3)

$$(2) \Leftrightarrow 4KK_1 = 2\Theta\Theta_1 + 2\Delta\Delta_1 \underset{(3)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}$$

$$4KK_1 = AA_1 + KK_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1 \Leftrightarrow$$

$$3KK_1 = AA_1 + BB_1 + \Gamma\Gamma_1 \Leftrightarrow 3KK_1 = \alpha \Leftrightarrow KK_1 = \frac{\alpha}{3}$$

Επομένως το σημείο K_1 είναι ΣΤΑΘΕΡΟ.



Από το M (σταθερό σημείο του χώρου) φέρνουμε $MM_1 \perp (A_1B_1\Gamma_1)$.
Είναι $\widehat{MM_1K_1} = 90^0$,
άρα το σημείο M_1 "βλέπει" το σταθερό τμήμα MK_1 υπό ορθή γωνία, επομένως το M βρίσκεται στην επιφάνεια της σφαίρας με διάμετρο MK_1.

Ο ζητούμενος γ.τ. αποτελείται από το σύνολο των σημείων M της σφαίρας με διάμετρο MK_1, που το κάθετο επίπεδο της MM_1 στο M τέμνει και τις τρεις ημιευθείες AA_1, BB_1 και $\Gamma\Gamma_1$.