ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΚΕΝΤΡΑ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΕΧΝΙΚΗΣ & ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ (ΚΑΤΕΕ)

ΚΥΚΛΟΣ (Τ)

ΤΕΧΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ – ΓΡΑΦΙΚΩΝ ΤΕΧΝΩΝ – ΧΗΜΙΚΩΝ ΠΕΤΡΕΛΑΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1979

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ – ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ – ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ)

Ζήτημα 1ο :

Αν α, β, γ είναι δ.ο.α.π., τότε $2\beta = \alpha + \gamma$ (1)

Αν α, β, γ είναι δ.ο.γ.π., τότε $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ (2)

Από (1) και (2) τα α, γ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2\beta x + \beta^2 = 0$

η οποία έχει μια διπλή ρίζα $x = \beta$.

Επομένως $\alpha = \beta = \gamma$.

Σημείωση: 'Εχουμε μια σταθερή ακολουθία που είναι ταυτόχρονα αριθμητική πρόοδος με διαφορά 0 και γεωμετρική πρόοδος με λόγο 1.

Ζήτημα 2ο :

$\varphi(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

$\varphi'(x) = 3x^2 + 4x = x(3x + 4)$

$\varphi''(x) = 6x + 4$

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0	-	0	+	
$\varphi(x)$		↗		↘		↗	

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]$ και $[0, +\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{4}{3}, 0\right]$.

Η φ παρουσιάζει τοπ. μέγιστο το $\varphi\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{76}{27} \rightarrow$ σημείο Α $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{76}{27}\right)$

Η ϕ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $\phi(0) = -4 \rightarrow$ σημείο Β (0 , -4)

- $\Delta_1 = \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right] \rightarrow \phi(\Delta_1) = \left(-\infty, -\frac{76}{27}\right]$ διότι

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = -\infty$ και $\phi\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{76}{27}$

- $\Delta_2 = \left(-\frac{4}{3}, 0\right) \rightarrow \phi(\Delta_2) = \left(-3, -\frac{76}{27}\right)$, διότι

$\lim\limits_{x \to -\frac{4}{3}^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{4}{3}^+} (x^3 + 2x^2 - 4) = -\frac{76}{27}$ και $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^3 + 2x^2 - 4) = -4$

- $\Delta_3 = [0, +\infty) \rightarrow \phi(\Delta_3) = [-4, +\infty)$ διότι

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 + 2x^2 - 4) = +\infty$, $\phi(0) = -4$

Επομένως $\phi(A) = \phi(\Delta_1) \cup \phi(\Delta_2) \cup \phi(\Delta_3) = (-\infty, +\infty) = \mathrm{IR}$.

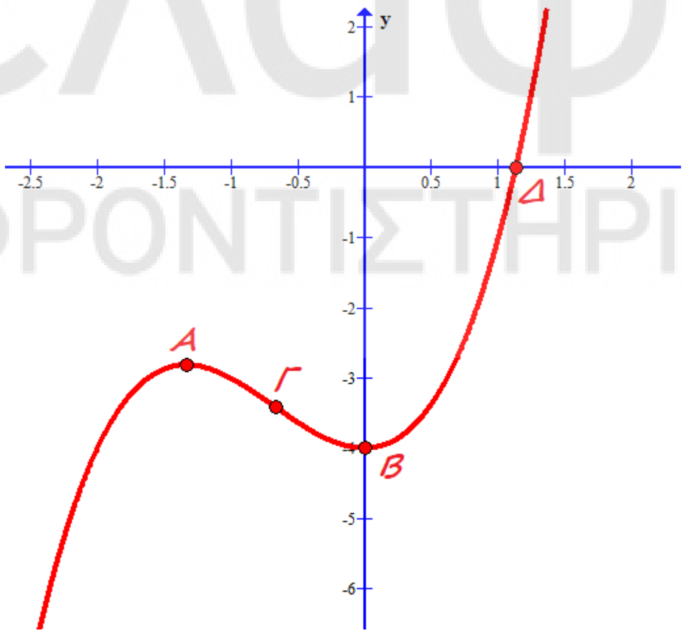
x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\phi''(x)$	$-$	0	$+$
$\phi(x)$	$\frown$		$\smile$

$\phi\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{92}{27} \rightarrow$ σημείο καμπής $\Gamma\left(-\frac{2}{3}, -\frac{92}{27}\right)$

- με τον άξονα $y'y$: $\phi(0) = -4 \rightarrow$ σημείο τομής Β (0 , -4)
- με τον άξονα $x'x$: $\phi(x) = 0$

$0 \notin \phi(\Delta_1)$, $0 \notin \phi(\Delta_2)$, $0 \in \phi(\Delta_3)$, άρα η εξίσωση $\phi(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα που βρίσκεται στο Δ_3.

$\phi(1) = -1$ και $\phi(2) = 12$, άρα η γραφική παράσταση της ϕ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\Delta(\delta, 0)$, με $\delta \in (1, 2)$



Εύρεση του σημείου Δ.

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - 4 = 0 \quad (1)$

Θέτουμε $x = y - \frac{2}{3}$ και η (1) γίνεται : $\left(y - \frac{2}{3}\right)^3 + 2\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$y^3 - 3y^2\frac{2}{3} + 3y\frac{4}{9} - \frac{8}{27} + 2y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{8}{9} - 4 = 0 \Leftrightarrow y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{92}{27} = 0 \quad (2)$$

Θέτουμε $y = z + \frac{4}{9z}$ και η (2) γίνεται : $\left(z + \frac{4}{9z}\right)^3 - \frac{4}{3}\left(z + \frac{4}{9z}\right) - \frac{92}{27} = 0 \Leftrightarrow$

$$z^3 + 3z^2\frac{4}{9z} + 3z\frac{16}{81z^2} + \frac{64}{729z^3} - \frac{4}{3}z - \frac{16}{27z} - \frac{92}{27} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^3 + \frac{4z}{3} + \frac{16}{27z} + \frac{64}{729z^3} - \frac{4}{3}z - \frac{16}{27z} - \frac{92}{27} = 0 \Leftrightarrow z^6 - \frac{92}{27}z^3 + \frac{64}{729} = 0 \quad (3)$$

Θέτουμε $z^3 = \omega$ και η (3) γίνεται : $\omega^2 - \frac{92}{27}\omega + \frac{64}{729} = 0$

$$\Delta = \left(\frac{92}{27}\right)^2 - 4\frac{64}{729} = \frac{8464}{729} - \frac{256}{729} = \frac{8208}{729}$$

$$\omega = \frac{\frac{92}{27} \pm \sqrt{\frac{8208}{729}}}{2} = \frac{\frac{92}{27} \pm \frac{12\sqrt{57}}{27}}{2} = \frac{\frac{92 \pm 12\sqrt{57}}{27}}{2} = \frac{92 \pm 12\sqrt{57}}{54} = \frac{46 \pm 6\sqrt{57}}{27}$$

άρα $z = \sqrt[3]{\frac{46 \pm 6\sqrt{57}}{27}} = \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3}$

άρα $y = \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{4}{9\frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3}} = \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{4}{3\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{4\sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}}{3\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}\sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}} = \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{4\sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}}{3\sqrt[3]{46^2 - \left(6\sqrt{57}\right)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{4\sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}}{3\sqrt[3]{64}} = \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}}}{3} + \frac{\cancel{4}\sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}}{3\cdot\cancel{4}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{46 \pm 6\sqrt{57}} + \sqrt[3]{46 \mp 6\sqrt{57}}}{3} = \frac{\sqrt[3]{46 + 6\sqrt{57}} + \sqrt[3]{46 - 6\sqrt{57}}}{3}$$

άρα $x = \frac{\sqrt[3]{46 + 6\sqrt{57}} + \sqrt[3]{46 - 6\sqrt{57}}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{\sqrt[3]{46 + 6\sqrt{57}} + \sqrt[3]{46 - 6\sqrt{57}} - 2}{3}$

Επομένως $\mathbf{\Delta}\left(\frac{\sqrt[3]{46 + 6\sqrt{57}} + \sqrt[3]{46 - 6\sqrt{57}} - 2}{3}, 0\right)$

Ζήτημα 3ο :

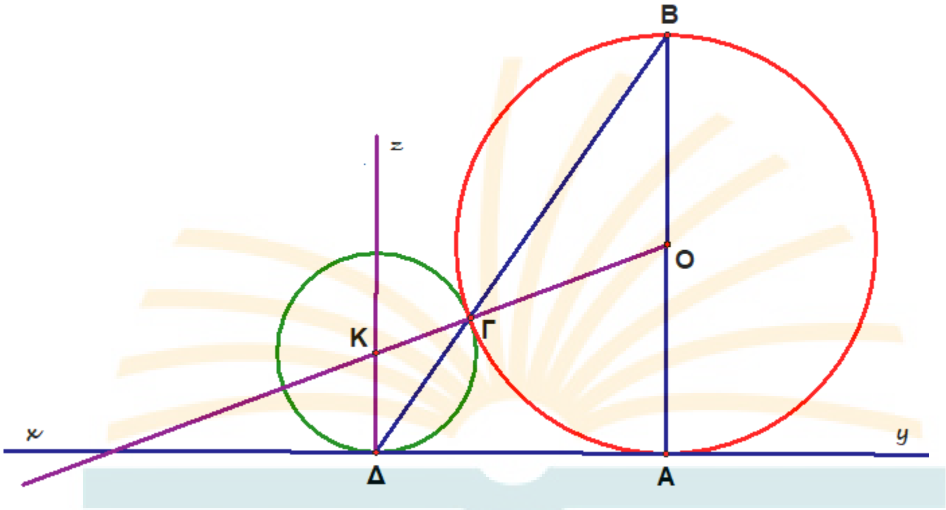
α) $ΔΓ \cdot ΔΒ = ΑΔ^2 \Leftrightarrow$

$(ΔΒ - ΒΓ) \cdot ΔΒ = ΑΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΔΒ^2 - ΒΓ \cdot ΔΒ = ΑΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΔΒ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ \Leftrightarrow$

$ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$



β) Από το σημείο Δ φέρνουμε $Δz \perp xy$.

Η προέκταση της ΟΓ τέμνει την Δz στο Κ.

Ο ζητούμενος κύκλος έχει κέντρο το Κ και ακτίνα ΚΓ.

Ζήτημα 4ο :

1η λύση

$ημ^2Α + ημ^2Β + ημ^2Γ =$

$= ημ^2(Β + Γ) + ημ^2Β + ημ^2Γ$

$= (ημΒσυνΓ + συνΒημΓ)^2 + ημ^2Β + ημ^2Γ$

$= ημ^2Βσυν^2Γ + 2ημΒσυνΒημΓσυνΓ + συν^2Βημ^2Γ + ημ^2Β + ημ^2Γ$

$= (1-συν^2Β)συν^2Γ + 2ημΒσυνΒημΓσυνΓ + συν^2Β(1-συν^2Γ) + ημ^2Β + ημ^2Γ$

$= συν^2Γ-συν^2Βσυν^2Γ+2ημΒσυνΒημΓσυνΓ+συν^2Β-συν^2Βσυν^2Γ+ημ^2Β+ημ^2Γ$

$= 1 + 1 + 2ημΒσυνΒημΓσυνΓ - 2συν^2Βσυν^2Γ$

$= 2 - 2συνΒσυνΓ \cdot (συνΒσυνΓ - ημΒημΓ)$

$= 2 - 2συνΒσυνΓ \cdot συν(Β + Γ)$

$= 2 - 2συνΒσυνΓ \cdot (-συνΑ)$

$= 2 + 2συνΑσυνΒσυνΓ$

2η λύση

$$\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2B}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}$$

$$= \frac{3 - \sigma\upsilon\nu 2A - \sigma\upsilon\nu 2B - \sigma\upsilon\nu 2\Gamma}{2}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot(\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot(\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma + 1 - 1)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot(\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma + 1) + \frac{1}{2}$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\cdot[\sigma\upsilon\nu 2A + \sigma\upsilon\nu 2B + \sigma\upsilon\nu 2\Gamma + \sigma\upsilon\nu(2A+2B+2\Gamma)]$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\cdot[2\sigma\upsilon\nu(A + B)\sigma\upsilon\nu(A - B) + 2\sigma\upsilon\nu(A + B)\sigma\upsilon\nu(A+B+2\Gamma)]$$

$$= 2 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sigma\upsilon\nu(A + B)\cdot[\sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A+B+2\Gamma)]$$

$$= 2 - \sigma\upsilon\nu(A + B)\cdot 2\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)\cdot\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)$$

$$= 2 - 2\cdot\sigma\upsilon\nu(B + \Gamma)\cdot\sigma\upsilon\nu(A + \Gamma)\cdot\sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$= 2 - 2\cdot(-\sigma\upsilon\nu A)\cdot(-\sigma\upsilon\nu B)\cdot(-\sigma\upsilon\nu\Gamma)$$

$$= 2 + 2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$$