ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

(Άλγεβρα – Γεωμετρία - Τριγωνομετρία)
(ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Πέμπτη 16 Σεπτεμβρίου 1971

Άλγεβρα

Ζήτημα 1ον

α. Χαρακτηριστικό του δεκαδικού λογάριθμου ενός θετικού αριθμού λέγεται το ακέραιο μέρος του, εφόσον το άλλο μέρος (αν έχει) είναι θετικό και μικρότερο της μονάδας.

β. Όταν ένας θετικός αριθμός α πολλαπλασιάζεται επί 10^{μ}, ο δεκαδικός λογάριθμός του αυξάνεται κατά τον εκθέτη μ.
Απόδειξη : $\log(\alpha \cdot 10^{\mu}) = \log\alpha + \log 10^{\mu} = \log\alpha + \mu$

Ζήτημα 2ον

Για $x = 3$ και $y = -4$ έχουμε :

$$\begin{cases} 3(\alpha+\beta) + 8(\alpha-\beta) = 10\alpha + 8 \\ 6(\alpha+\beta) - 4(\alpha-\beta) = 8\alpha + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3\beta + 8\alpha - 8\beta - 10\alpha = 8 \\ 6\alpha + 6\beta - 4\alpha + 4\beta - 8\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

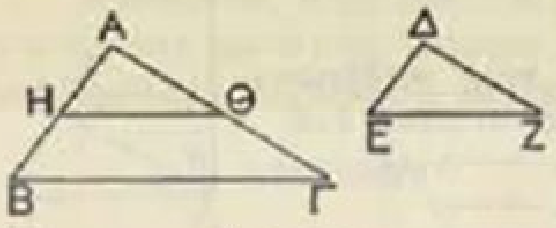
$$\begin{cases} \alpha - 5\beta = 8 \\ 2\alpha + 2\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 5\beta = -8 \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} 6\beta = -7 \Leftrightarrow \boxed{\beta = -\frac{7}{6}}$$

$$\alpha + \beta = 1 \overset{\beta = -\frac{7}{6}}{\Rightarrow} \alpha - \frac{7}{6} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{6} + 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{13}{6}}$$

Γεωμετρία

Ζήτημα 1ον

Ἐπὶ τῆς ΑΒ ὁρίζομεν τμῆμα ΑΗ ἴσον πρὸς ΔΕ καὶ φέρομεν τὴν ΗΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΗΘ θὰ εἶναι ὅμοια



Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{AB}{AH}=\frac{B\Gamma}{H\Theta}=\frac{A\Gamma}{A\Theta}$$

Ἐπειδὴ δὲ $AH=\Delta E$,

ἕπεται ὅτι $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{H\Theta}=\frac{A\Gamma}{A\Theta}$

Ἐκ τούτων δὲ καὶ τῶν $\frac{AB}{\Delta E}=\frac{B\Gamma}{EZ}=\frac{A\Gamma}{Z\Delta}$

βλέπομεν ὅτι $H\Theta=EZ$ καὶ $A\Theta=\Delta Z$. Τὰ δὲ τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα· ἑπομένως $\widehat{\Delta}=\widehat{A}$, $\widehat{E}=\widehat{H}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{Z}=\widehat{\Theta}=\widehat{\Gamma}$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ ἔχουσι καὶ τὰς γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν. Ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ζήτημα 2ον

- Πυθαγόρειο θεώρημα στο $\overset{\Delta}{OMA}$:

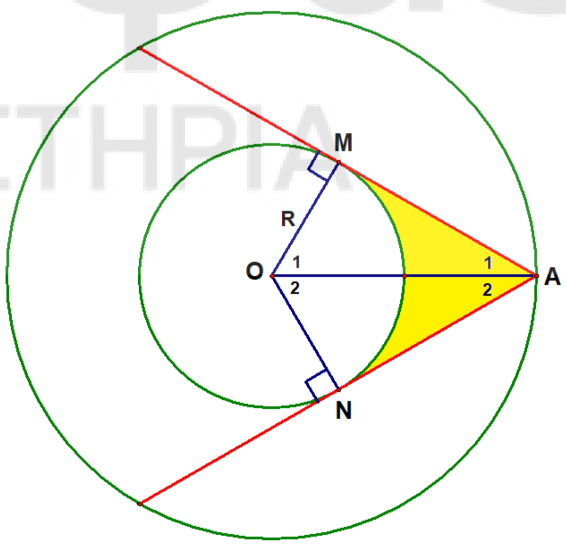
  $AM^2 = OA^2 - OM^2 = (2R)^2 - R^2 = 3R^2$, άρα $AM = \sqrt{3}R$

- Όμοια στο $\overset{\Delta}{ONA}$: $AN = \sqrt{3}R$

- Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{OMA}$ είναι $OM = R = \frac{OA}{2}$,

  άρα $\hat{A}_1 = 30^0$ και $\hat{O}_1 = 60^0$

- Όμοια στο $\overset{\Delta}{ONA}$: $\hat{O}_2 = 60^0$



$$E_{\gamma\rho\alpha\mu} = (OMA) + (ONA) - E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\tau o\mu.OMN}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot AM\cdot OM + \frac{1}{2}\cdot AN\cdot ON - \frac{\pi R^2\cdot 120^0}{360^0}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot R + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}R\cdot R - \frac{\pi R^2}{3}$$

$$= \sqrt{3}R^2 - \frac{\pi R^2}{3}$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{3}\cdot R^2}$$

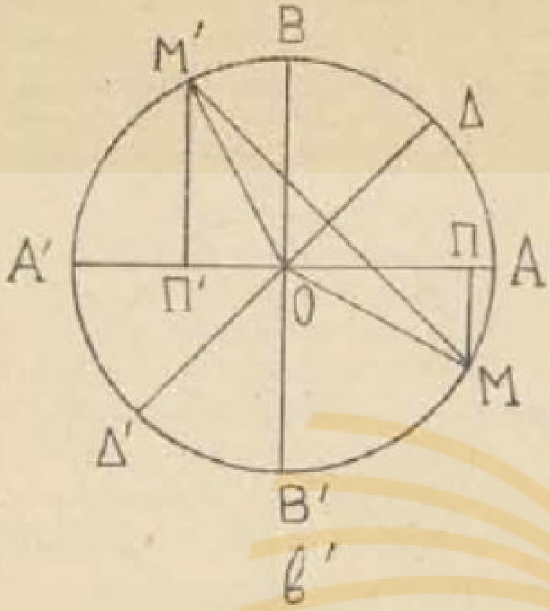
Τριγωνομετρία

Ζήτημα 1^{ον}

Ἔστω τ τὸ μέτρον τυχόντος ἐκ τῶν τόξων ΑΜ (σχ.)

καὶ ἡμτ $= (\overline{\Pi M})$

συντ $= (\overline{O\Pi})$ (1)



Κατὰ τὰ προηγούμενα τὸ τόξον 90° — τ θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ' συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν ΔΔ'. Θὰ εἶναι δὲ

$$\left.\begin{array}{l} ἡμ(90° - τ) = (\overline{\Pi' M'}). \\ συν(90° - τ) = (\overline{O\Pi'}) \end{array}\right\}(2)$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος

$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{M'B}$, ἕπεται ὅτι $A\hat{O}M = B\hat{O}M'$ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα ΟΠΜ, ΟΠ'Μ' εἶναι ἴσα καὶ διὰ τοῦτο Π'Μ' = ΟΠ, ΟΠ' = ΠΜ.

Ἂν δὲ τὰς πλευρὰς ταύτας θεωρήσωμεν ὡς ἀνύσματα, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ μήκη $(\overline{\Pi' M'})$ καὶ $(\overline{O\Pi})$ εἶναι ὁμόσημα, ἐπίσης δὲ ὁμόσημα εἶναι καὶ τὰ $(\overline{O\Pi'})$ καὶ $(\overline{\Pi M})$.

Εἶναι λοιπὸν καὶ $(\overline{\Pi' M'}) = (\overline{O\Pi})$, $(\overline{O\Pi'}) = (\overline{\Pi M})$.

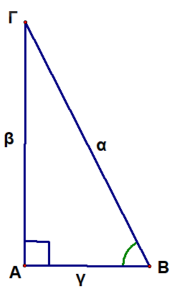
Ἕνεκα δὲ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων (1) καὶ (2) αὗται γίνονται ἡμ(90° — τ) = συντ, συν(90° — τ) = ἡμτ

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι: εφ(90° — τ) = σφτ, σφ(90° — τ) = εφτ

Ζήτημα 2^{ον}

Ισχύουν : $ημB = \frac{β}{α}$, $συνB = \frac{γ}{α}$, $εφB = \frac{β}{γ}$ και $α^2 = β^2 + γ^2$ (1)

$$\frac{1}{συν^2B - ημ^2B} + \frac{2εφB}{1 - εφ^2B} = \frac{1}{\left(\frac{γ}{α}\right)^2 - \left(\frac{β}{α}\right)^2} + \frac{2\frac{β}{γ}}{1 - \left(\frac{β}{γ}\right)^2} = \frac{1}{\frac{γ^2}{α^2} - \frac{β^2}{α^2}} + \frac{\frac{2β}{γ}}{1 - \frac{β^2}{γ^2}}$$



$$= \frac{1}{\frac{γ^2 - β^2}{α^2}} + \frac{\frac{2β}{\cancel{γ}}}{\frac{γ^2 - β^2}{γ^{\cancel{2}}}} = \frac{α^2}{γ^2 - β^2} + \frac{2βγ}{γ^2 - β^2} = \frac{α^2 + 2βγ}{γ^2 - β^2}$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{γ^2 + β^2 + 2βγ}{γ^2 - β^2} = \frac{(γ + β)^{\cancel{2}}}{(γ - β)\cdot\cancel{(γ + β)}} = \frac{γ + β}{γ - β}$$