ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Παρασκευή 3 Σεπτεμβρίου 1971

Ζήτημα 1ο

Διμελής σχέση σε ένα σύνολο Α λέγεται μια σχέση μεταξύ δύο στοιχείων του συνόλου Α και είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου
$A \times A = A^2 = \{(x, y) \mid x \in A \text{ και } y \in A\}$.
Παράδειγμα : Η σχέση καθετότητας δύο ευθειών ε_1, ε_2 του επιπέδου που συμβολίζεται με $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Διμελής σχέση του συνόλου Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια σχέση μεταξύ ενός στοιχείου του συνόλου Α με ένα στοιχείο του συνόλου Β και είναι υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ και } y \in B\}$.
Παράδειγμα : "y είναι το νησί των Κυκλάδων που παραθέρισε ο μαθητής x" είναι μια διμελής σχέση του συνόλου Α = { x | x μαθητής του σχολείου Α } στο σύνολο Β = { y | y νησί των Κυκλάδων }

Συνάρτηση λέγεται μια απεικόνιση του μη κενού συνόλου Α στο σύνολο Β, έτσι ώστε κάθε στοιχείο του συνόλου Α να έχει σαν εικόνα ένα και μόνο στοιχείο του συνόλου Β.
Παράδειγμα : Α = { x | x άρτιος φυσικός αριθμός }, Β = { y | y φυσικός αριθμός }
Η απεικόνιση $y = \frac{1}{2}x$ είναι μια συνάρτηση, όπου κάθε φυσικός αριθμός y είναι η εικόνα ενός άρτιου αριθμού x, με $x = 2y$.

Ισοδυναμία λέγεται μια διμελής σχέση σε ένα σύνολο Α, αν η σχέση είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική.
Παράδειγμα : Αν Α = { x | x τυχαίο τρίγωνο } τότε η σχέση ομοιότητας ($\approx$) δύο τριγώνων είναι σχέση ισοδυναμίας, διότι ισχύουν:
1. $x \approx x$ (ανακλαστική ιδιότητα)
2. Αν $x \approx y$, τότε $y \approx x$ (συμμετρική ιδιότητα)
3. Αν $x \approx y$ και $y \approx z$, τότε $x \approx z$ (μεταβατική ιδιότητα)

Ζήτημα 2ο

Τα σημεία $A_1, A_2, \dots A_\nu$ ορίζονται από τις ρίζες της εξίσωσης $z^\nu - 1 = 0$

οι οποίες είναι οι $\rho_\kappa = \sigma\upsilon\nu\dfrac{2(\kappa-1)\pi}{\nu} + i\cdot\eta\mu\dfrac{2(\kappa-1)\pi}{\nu}$, $\kappa = 1, 2, \dots, \nu$

Για $\kappa = 1$ είναι $\rho_1 = 1$ και $A_1\,(1, 0)$

$(A_1A_\kappa) = \left|\overrightarrow{A_1A_\kappa}\right| = |1-\rho_\kappa|$, $\kappa = 2, 3, \dots, \nu$

Είναι $z^\nu - 1 = (z-\rho_1)\cdot(z-\rho_2)\cdot(z-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(z-\rho_\nu) \Leftrightarrow$

$z^\nu - 1 = (z-1)\cdot(z-\rho_2)\cdot(z-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(z-\rho_\nu) \Leftrightarrow$

$\dfrac{z^\nu - 1}{z-1} = (z-\rho_2)\cdot(z-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(z-\rho_\nu) \Leftrightarrow$

$z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \dots + z + 1 = (z-\rho_2)\cdot(z-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(z-\rho_\nu) \overset{z=1}{\Rightarrow}$

$\nu = (1-\rho_2)\cdot(1-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(1-\rho_\nu)$ **(1)**

$$\begin{aligned}\text{Άρα } (A_1A_2)\cdot(A_1A_3)\cdot\ldots\cdot(A_1A_\nu) &= |1-\rho_1|\cdot|1-\rho_2|\cdot\ldots\cdot|1-\rho_\nu| \\ &= |(1-\rho_2)\cdot(1-\rho_3)\cdot\ldots\cdot(1-\rho_\nu)| \\ &\overset{(1)}{=} |\nu| \\ &= \nu\end{aligned}$$

Ζήτημα 3ο

α) $\alpha_\nu = \alpha\cdot x^\nu + \beta\cdot y^\nu$ **(1)**

$(1) \Rightarrow \quad \alpha_{\nu+1} = \alpha\cdot x^{\nu+1} + \beta\cdot y^{\nu+1}$ **(2)**

$(1) \Rightarrow \quad \alpha_{\nu+2} = \alpha\cdot x^{\nu+2} + \beta\cdot y^{\nu+2}$ **(3)**

$\alpha_\nu\cdot\alpha_{\nu+2} = \alpha_{\nu+1}^{\;2} + 8 \underset{(3)}{\overset{(1),(2)}{\Leftrightarrow}} (\alpha x^\nu + \beta y^\nu)\cdot(\alpha x^{\nu+2} + \beta y^{\nu+2}) = (\alpha x^{\nu+1} + \beta y^{\nu+1})^2 + 8 \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha^2x^{2\nu+2}} + \alpha\beta x^\nu y^{\nu+2} + \alpha\beta x^{\nu+2}y^\nu + \cancel{\beta^2y^{2\nu+2}} = \cancel{\alpha^2x^{2\nu+2}} + 2\alpha\beta x^{\nu+1}y^{\nu+1} + \cancel{\beta^2y^{2\nu+2}} + 8 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta x^\nu y^{\nu+2} - 2\alpha\beta x^{\nu+1}y^{\nu+1} + \alpha\beta x^{\nu+2}y^\nu = 8 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta x^\nu y^\nu\cdot(y^2 - 2xy + x^2) = 8 \Leftrightarrow$

$\alpha\beta x^\nu y^\nu\cdot(x-y)^2 = 8$ που ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

άρα $x\cdot y = 1$ **(4)** και $\alpha\beta\cdot(x-y)^2 = 8$ **(5)**

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha x + \beta y \\ \alpha_2 = \alpha x^2 + \beta y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x + \beta y = 1 \\ \alpha x^2 + \beta y^2 = 3 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} x & y \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = xy^2 - x^2 y = xy\cdot(y - x)$$

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 3 & y^2 \end{vmatrix} = y^2 - 3y = y\cdot(y - 3)$$

$$D_\beta = \begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & 3 \end{vmatrix} = 3xy - x^2 = x\cdot(3 - x)$$

$$\alpha = \frac{D_\alpha}{D} = \frac{y\cdot(y-3)}{xy\cdot(y-x)} = \frac{y-3}{x\cdot(y-x)} \quad \textbf{(6)}$$

$$\beta = \frac{D_\beta}{D} = \frac{x\cdot(3-x)}{xy\cdot(y-x)} = \frac{3-x}{y\cdot(y-x)} \quad \textbf{(7)}$$

$$(6)\,,\,(7) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} \alpha\cdot\beta = \frac{y-3}{x\cdot(y-x)}\cdot\frac{3-x}{y\cdot(y-x)} \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta = \frac{(y-3)\cdot(3-x)}{xy\cdot(y-x)^2} \Leftrightarrow$$

$$\alpha\cdot\beta\cdot(y-x)^2 = \frac{(y-3)\cdot(3-x)}{xy} \underset{\textbf{(5)}}{\overset{\textbf{(4)}}{\Leftrightarrow}} 8 = (y-3)\cdot(3-x) \Leftrightarrow$$

$$8 = 3y - xy - 9 + 3x \overset{\textbf{(4)}}{\Leftrightarrow} 3x + 3y = 18 \Leftrightarrow x + y = 6 \quad \textbf{(8)}$$

Από τις σχέσεις (4) και (8) προκύπτει ότι τα x , y είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 - 6\omega + 1 = 0$, δηλαδή οι $3 \pm 2\sqrt{2}$ ή $(1 \pm \sqrt{2})^2$

Άρα $x = 3 \pm 2\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^2$ και $y = 3 \mp 2\sqrt{2} = (1 \mp \sqrt{2})^2$.

$$(6) \Rightarrow \alpha = \frac{y-3}{xy - x^2} \underset{x^2-6x+1=0}{\overset{(4)}{=}} \frac{y - 3xy}{1 - (6x - 1)} = \frac{y\cdot(1-3x)}{2\cdot(1-3x)} = \frac{y}{2} \quad \textbf{(9)}$$

$$(7) \Rightarrow \beta = \frac{3-x}{y^2 - xy} \underset{y^2-6y+1=0}{\overset{(4)}{=}} \frac{3xy - x}{6y - 1 - 1} = \frac{x\cdot(3y-1)}{2\cdot(3y-1)} = \frac{x}{2} \quad \textbf{(10)}$$

Επομένως $\alpha_\nu = \alpha\cdot x^\nu + \beta\cdot y^\nu \underset{\textbf{(10)}}{\overset{\textbf{(9)}}{\Leftrightarrow}} \alpha_\nu = \frac{y}{2}\cdot x^\nu + \frac{x}{2}\cdot y^\nu \Leftrightarrow$

$$\alpha_\nu = \frac{xy}{2}\cdot(x^{\nu-1} + y^{\nu-1}) \overset{(4)}{\Leftrightarrow} \alpha_\nu = \frac{1}{2}\cdot(x^{\nu-1} + y^{\nu-1}) \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{1}{2}\cdot[(3 + 2\sqrt{2})^{\nu-1} + (3 - 2\sqrt{2})^{\nu-1}]}$$

ή

$$\boxed{\alpha_\nu = \frac{1}{2}\cdot[(1 + \sqrt{2})^{2\nu-2} + (1 - \sqrt{2})^{2\nu-2}]}$$

β) Είναι $\alpha_\nu = \dfrac{1}{2}\cdot[(1+\sqrt{2})^{2\nu-2} + (1-\sqrt{2})^{2\nu-2}]$

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu + (-1)^\nu &= \frac{1}{2}\cdot[(1+\sqrt{2})^{2\nu-2} + (1-\sqrt{2})^{2\nu-2}] + (-1)^\nu \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{2\nu-2} + (1-\sqrt{2})^{2\nu-2} + 2\cdot(-1)^\nu}{2} \\
&= \frac{[(1+\sqrt{2})^{\nu-1}]^2 + [(1-\sqrt{2})^{\nu-1}]^2 + 2\cdot(-1)^\nu}{2} \\
&= \frac{[(1+\sqrt{2})^{\nu-1}]^2 + [(1-\sqrt{2})^{\nu-1}]^2 - 2\cdot(1+\sqrt{2})^{\nu-1}\cdot(1-\sqrt{2})^{\nu-1}}{2} \\
&= \left[\frac{(1+\sqrt{2})^{\nu-1} - (1-\sqrt{2})^{\nu-1}}{\sqrt{2}}\right]^2
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι $\beta_\nu = \dfrac{(1+\sqrt{2})^{\nu-1} - (1-\sqrt{2})^{\nu-1}}{\sqrt{2}} \in \mathbb{N}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Για $\nu = 1 : \beta_1 = 0 \in \mathbb{N}$

Για $\nu = 2 : \beta_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2}) - (1-\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2 \in \mathbb{N}$

Υποθέτουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa - 1$ και $\nu = \kappa$, δηλαδή $\beta_{\kappa-1}, \beta_\kappa \in \mathbb{N}$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλαδή $\beta_{\kappa+1} \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\beta_{\nu+1} &= \frac{(1+\sqrt{2})^{\kappa} - (1-\sqrt{2})^{\kappa}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^2\cdot(1+\sqrt{2})^{\kappa-2} - (1-\sqrt{2})^2\cdot(1-\sqrt{2})^{\kappa-2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(3+2\sqrt{2})\cdot(1+\sqrt{2})^{\kappa-2} - (3-2\sqrt{2})^2\cdot(1-\sqrt{2})^{\kappa-2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{[1+2(1+\sqrt{2})]\cdot(1+\sqrt{2})^{\kappa-2} - [1+2(1-\sqrt{2})]\cdot(1-\sqrt{2})^{\kappa-2}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{\kappa-2} + 2\cdot(1+\sqrt{2})^{\kappa-1} - (1-\sqrt{2})^{\kappa-2} - 2\cdot(1-\sqrt{2})^{\kappa-1}}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{2})^{\kappa-2} - (1-\sqrt{2})^{\kappa-2}}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{(1+\sqrt{2})^{\kappa-1} - (1-\sqrt{2})^{\kappa-1}}{\sqrt{2}} \\
&= \beta_{\kappa-1} + 2\beta_\kappa \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Άρα $\beta_\nu \in \mathbb{N}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$.

Επομένως ο αριθμός $\alpha_\nu + (-1)^\nu$ είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού.