ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

(ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Τρίτη 7 Σεπτεμβρίου 1971

Ζήτημα 1°

Είναι $f(x) = |x+1|\cdot|x-2| = |(x+1)\cdot(x-2)| = |x^2 - x - 2|$

- $x^2 - x - 2 > 0$, όταν $x < -1$ ή $x > 2$
- $x^2 - x - 2 < 0$, όταν $-1 < x < 2$

Επομένως $f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0, & x \leq -1 \text{ ή } x \geq 2 \\ -x^2 + x + 2 < 0, & -1 < x < 2 \end{cases}$

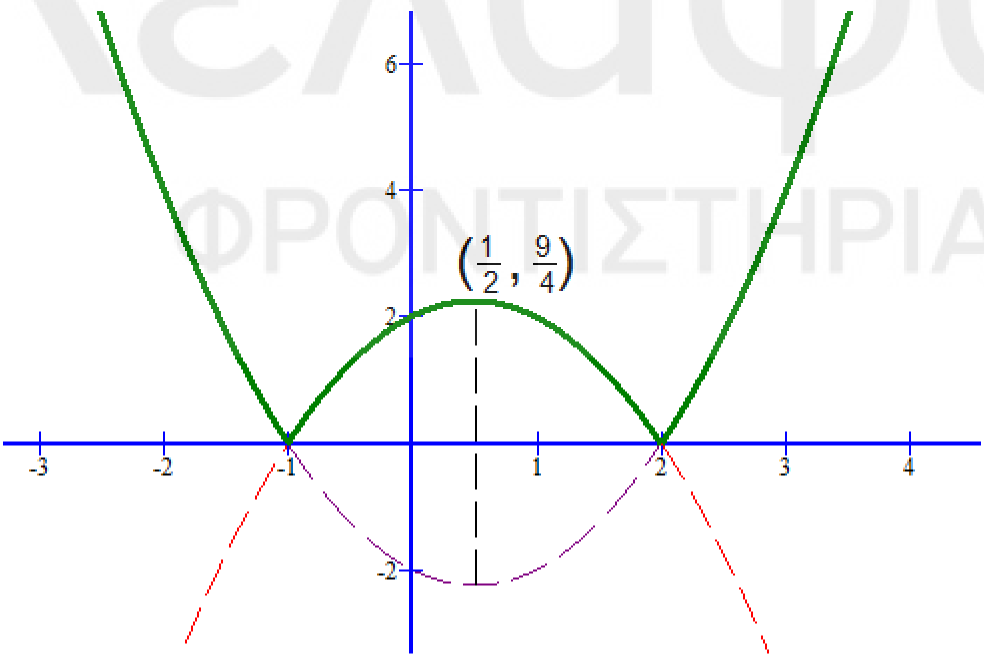
Η $f_1(x) = x^2 - x - 2$ είναι μια παραβολή και παρουσιάζει ελάχιστο

για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$ την τιμή $y = \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = -\dfrac{9}{4}$

Η $f_2(x) = -x^2 + x + 2$ είναι μια παραβολή και παρουσιάζει μέγιστο

για $x = \dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{1}{2}$ την τιμή $y = \dfrac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} = \dfrac{9}{4}$

Γραφική παράσταση



Ζήτημα 2°

$(1 + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 - 3\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma) \geq 1 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha \Leftrightarrow$

$1+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma-3\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-3\alpha\beta\gamma^2 \geq 1+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 - \alpha^2\beta\gamma - \alpha\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma^2 \geq 0 \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$

$2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - 2\alpha^2\beta\gamma - 2\alpha\beta^2\gamma - 2\alpha\beta\gamma^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta^2\gamma + \beta^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \gamma^2\alpha^2 - 2\alpha^2\beta\gamma + \alpha^2\beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2(\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2) + \gamma^2(\beta^2 - 2\alpha\beta + \alpha^2) + \alpha^2(\gamma^2 - 2\beta\gamma + \beta^2) \geq 0 \Leftrightarrow$

$\beta^2(\alpha - \gamma)^2 + \gamma^2(\beta - \alpha)^2 + \alpha^2(\gamma - \beta)^2 \geq 0$ που ισχύει

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν : $\beta(\alpha - \gamma) = \gamma(\beta - \alpha) = \alpha(\gamma - \beta) = 0$

το οποίο ισχύει αν $\boxed{\alpha = \beta = \gamma}$ ή αν $\boxed{\text{δύο από τα } \alpha, \beta, \gamma \text{ είναι } 0}$.

Ζήτημα 3°

α) • $(2\alpha + 2)^3 < (\alpha + 2)^4 - \alpha^4 \Leftrightarrow$

$\cancel{8\alpha^3} + \cancel{24\alpha^2} + 24\alpha + 8 < \cancel{\alpha^4} + \cancel{8\alpha^3} + \cancel{24\alpha^2} + 32\alpha + 16 - \cancel{\alpha^4} \Leftrightarrow$

$0 < 32\alpha + 16 - 24\alpha - 8 \Leftrightarrow$

$0 < 8\alpha + 8$ που ισχύει διότι $\alpha \geq 0$

• $(\alpha + 2)^4 - \alpha^4 < (2\alpha + 3)^3 \Leftrightarrow$

$\cancel{8\alpha^3} + 24\alpha^2 + 32\alpha + 16 < \cancel{8\alpha^3} + 36\alpha^2 + 54\alpha + 27 \Leftrightarrow$

$0 < 36\alpha^2 + 54\alpha + 27 - 24\alpha^2 - 32\alpha - 16 \Leftrightarrow$

$0 < 12\alpha^2 + 22\alpha + 11$ που ισχύει διότι $\alpha \geq 0$

Επομένως $(2\alpha + 2)^3 < (\alpha + 2)^4 - \alpha^4 < (2\alpha + 3)^3$ **(1)**

β) Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $\alpha \geq 0$, άρα και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$

δηλαδή $(2\nu + 2)^3 < (\nu + 2)^4 - \nu^4 < (2\nu + 3)^3 \Leftrightarrow$

$2\nu + 2 < \sqrt[3]{(\nu + 2)^4 - \nu^4} < 2\nu + 3$

Ο αριθμός $\sqrt[3]{(\nu + 2)^4 - \nu^4}$ ΔΕΝ μπορεί να είναι φυσικός αριθμός διότι περιέχεται μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών.