ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Δευτέρα 13 Σεπτεμβρίου 1971

Ζήτημα 1ο

Διά νά λύσωμεν τήν έξίσωσιν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ (1) ($\alpha\neq0$), θεωροῦμεν τήν ἰσοδύναμόν της $\alpha\chi^2+\beta\chi=-\gamma$.

Προσπαθοῦμεν τώρα νά καταστήσωμεν τέλειον τετράγωνον τό πρῶτον μέλος ταύτης. Πολλαπλασιάζομεν τά μέλη της ἐπί 4α καί προσθέτομεν εἰς αὐτά τό β^2, ὅτε εὑρίσκομεν τήν $4\alpha^2\chi^2+4\alpha\beta\chi+\beta^2=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἡ ὁποία γράφεται καί οὕτω: $(2\alpha\chi+\beta)^2=\beta^2-4\alpha\gamma$.

Αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν (1), προκύπτει δέ ἀπό τήν $2\alpha\chi+\beta=\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ἄν ὑψώσωμεν τά μέλη της εἰς τό τετράγωνον· ἄρα ἔχει τάς ρίζας τῶν $2\alpha\chi+\beta=\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$.

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$.

Ἤτοι, ἄν καλέσωμεν ρ_1 καί ρ_2 τάς ρίζας τῆς (1), θά ἔχωμεν

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\quad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐφαρμόζοντες τούς τύπους τούτους εὑρίσκομεν τάς ρίζας οἱασδήποτε μορφῆς ἐξισώσεως τοῦ β' βαθμοῦ.

ΠΕΡΙ ΤΟΥ ΕΙΔΟΥΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ ΤΗΣ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ ρ_1 καί ρ_2 τάς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θά ἔχωμεν, ὡς εἴδομεν

$$\rho_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν εἶναι τό $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί καί ἄνισοι. Ἐπί πλέον, ἐάν τό $\beta^2-4\alpha\gamma$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, αἱ ρίζαι εἶναι σύμμετροι, ἄλλως ἀσύμμετροι.

Ἐάν τό $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαί καί ἴσαι μέ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐάν εἶναι τό $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἐν γένει, ἐπειδή δέ τό $\beta^2-4\alpha\gamma$ γράφεται καί οὕτω $-(4\alpha\gamma-\beta^2)=i^2(4\alpha\gamma-\beta^2)$, ἕπεται ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν αἱ ρίζαι εἶναι συζυγεῖς φανταστικαί, ἤτοι:

$$\rho_1=\frac{-\beta+i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha},\qquad \rho_2=\frac{-\beta-i\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}.$$

Ζήτημα 2^o

1^η λύση

Για να είναι το πολυώνυμο $4x^2 + 8(\mu^2 - 3)x + 12 - 4\mu^2$ τέλειο τετράγωνο πρέπει :

$\Delta = 0 \;\Leftrightarrow\; [8(\mu^2 - 3)]^2 - 4\cdot 4\cdot(12 - 4\mu^2) = 0 \;\Leftrightarrow$

$64(\mu^2 - 3)^2 + 64(\mu^2 - 3) = 0 \;\Leftrightarrow\; 64(\mu^2 - 3)(\mu^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow$

$\mu^2 = 3$ ή $\mu^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; \mu = \pm\sqrt{3}$ ή $\mu = \pm\sqrt{2}$

Επαλήθευση

- Για $\mu = \pm\sqrt{3}$ το πολυώνυμο γίνεται :
  $4x^2 + 8(3 - 3)x + 12 - 4\cdot 3 = 4x^2 = (\pm 2x)^2$
- Για $\mu = \pm\sqrt{2}$ το πολυώνυμο γίνεται :
  $4x^2 + 8(2 - 3)x + 12 - 4\cdot 2 = 4x^2 - 8x + 4 = (\pm 2x \mp 2)^2$

2^η λύση

'Εστω ότι υπάρχει πολυώνυμο της μορφής $\alpha x + \beta$, τέτοιο ώστε

$(\alpha x + \beta)^2 = 4x^2 + 8(\mu^2 - 3)x + 12 - 4\mu^2 \;\Leftrightarrow$

$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 = 4x^2 + 8(\mu^2 - 3)x - 4(\mu^2 - 3) \;\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ 2\alpha\beta = 8(\mu^2 - 3) \\ \beta^2 = -4(\mu^2 - 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 2 \\ \beta^2 = -\alpha\beta \\ \beta^2 = -4\mu^2 + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pm 2 \\ \beta = 0 \text{ ή } \beta = -\alpha \\ \mu^2 = \dfrac{12 - \beta^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

▹ Αν $\beta = 0$ και $\alpha = \pm 2$, τότε :
  $\mu^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; \mu = \pm\sqrt{3}$ και $\alpha x + \beta = \pm 2x$

▹ Αν $\beta = -\alpha$ και $\alpha = \pm 2$, τότε :
  $\beta^2 = 4,\; \mu^2 = 2 \;\Leftrightarrow\; \mu = \pm\sqrt{2}$ και $\alpha x + \beta = \pm 2x \mp 2$

Επαλήθευση

- Για $\mu = \pm\sqrt{3}$ το πολυώνυμο γίνεται :
  $4x^2 + 8(3 - 3)x + 12 - 4\cdot 3 = 4x^2 = (\pm 2x)^2$
- Για $\mu = \pm\sqrt{2}$ το πολυώνυμο γίνεται :
  $4x^2 + 8(2 - 3)x + 12 - 4\cdot 2 = 4x^2 - 8x + 4 = (\pm 2x \mp 2)^2$

Ζήτημα 3^{ο}

Περιορισμοί : $x \neq 4$ και $x \neq 4\mu$ και $x \neq \mu$

$$\frac{1}{x-4} = \frac{4}{4\mu - x} - \frac{5}{\mu - x} \Leftrightarrow$$

$$\cancel{(x-4)}(4\mu-x)(\mu-x)\frac{1}{\cancel{x-4}} = (x-4)\cancel{(4\mu-x)}(\mu-x)\frac{4}{\cancel{4\mu-x}} - (x-4)(4\mu-x)\cancel{(\mu-x)}\frac{5}{\cancel{\mu-x}} \Leftrightarrow$$

$$(4\mu - x)(\mu - x) = 4(x-4)(\mu - x) - 5(x-4)(4\mu - x) \Leftrightarrow$$

$$4\mu^2 - 4\mu x - \mu x + x^2 = 4\cdot(\mu x - x^2 - 4\mu + 4x) - 5\cdot(4\mu x - x^2 - 16\mu + 4x) \Leftrightarrow$$

$$4\mu^2 - 4\mu x - \mu x \cancel{+x^2} = 4\mu x \cancel{-4x^2} - 16\mu + 16x - 20\mu x \cancel{+5x^2} + 80\mu - 20x \Leftrightarrow$$

$$-4\mu x - \mu x - 4\mu x - 16x + 20\mu x + 20x = -4\mu^2 - 16\mu + 80\mu \Leftrightarrow$$

$$11\mu x + 4x = -4\mu^2 + 64\mu \Leftrightarrow (11\mu + 4)x = -4\mu(\mu - 16)$$

- Αν $11\mu + 4 = 0 \Leftrightarrow \mu = -\frac{4}{11}$ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $11\mu + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq -\frac{4}{11}$, τότε $x = \frac{-4\mu(\mu-16)}{11\mu+4}$

  Θα πρέπει να ικανοποιούνται οι περιορισμοί

  ▹ $\frac{-4\mu(\mu-16)}{11\mu+4} \neq 4 \Leftrightarrow -\cancel{4}\mu(\mu-16) \neq \cancel{4}(11\mu+4) \Leftrightarrow$

  $-\mu^2 + 16\mu = 11\mu + 4 \Leftrightarrow \mu^2 - 5\mu + 4 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 1$ και $\mu \neq 4$

  ▹ $\frac{-4\mu(\mu-16)}{11\mu+4} \neq 4\mu \Leftrightarrow -\cancel{4}\mu(\mu-16) \neq \cancel{4}\mu(11\mu+4) \Leftrightarrow$

  $-\mu^2 + 16\mu = 11\mu^2 + 4\mu \Leftrightarrow 12\mu(\mu-1) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 0$ και $\mu \neq 1$

  ▹ $\frac{-4\mu(\mu-16)}{11\mu+4} \neq \mu \Leftrightarrow -4\mu(\mu-16) \neq \mu(11\mu+4) \Leftrightarrow$

  $-4\mu^2 + 64\mu = 11\mu^2 + 4\mu \Leftrightarrow 15\mu(\mu-4) \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq 0$ και $\mu \neq 4$

Συνοψίζοντας

- Αν $\mu \neq -\frac{4}{11}$ και $\mu \neq 0$ και $\mu \neq 1$ και $\mu \neq 4$, τότε η εξίσωση

  έχει μοναδική λύση την $x = \frac{-4\mu\cdot(\mu-16)}{11\mu+4}$

- Αν $\mu = -\frac{4}{11}$ ή $\mu = 0$ ή $\mu = 1$ ή $\mu = 4$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη