ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
(ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Τετάρτη 15 Σεπτεμβρίου 1971

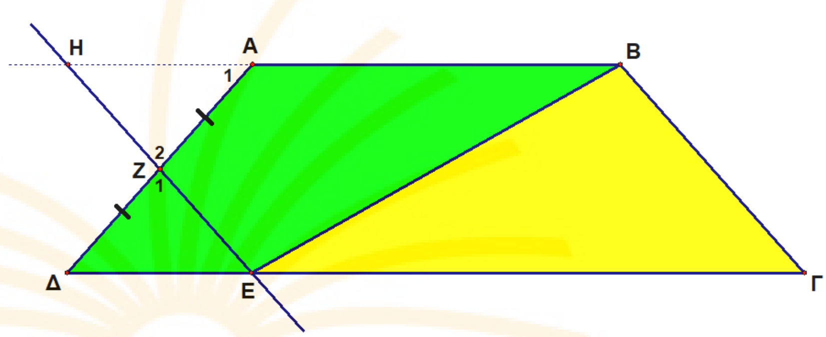
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

1η λύση

Η ΕΖ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Η.

Συγκρίνω τα $\overset{\triangle}{\Delta E Z}$, $\overset{\triangle}{A Z H}$.



Έχουν :

1) ΑΖ = ΖΔ

2) $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$ (κατακορυφήν)

3) $\hat{\Delta} = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ)

άρα $\overset{\triangle}{\Delta E Z} = \overset{\triangle}{A Z H}$

(ΒΕΓ) = (ΑΒΕΔ) = (ΑΒΕΖ) + (ΔΕΖ) = (ΑΒΕΖ) + (ΑΖΗ) = (ΒΕΗ)

Τα ισοεμβαδικά $\overset{\triangle}{BE\Gamma}$, $\overset{\triangle}{BEH}$ έχουν ίσα ύψη, άρα και ίσες βάσεις δηλαδή ΓΕ = ΒΗ.

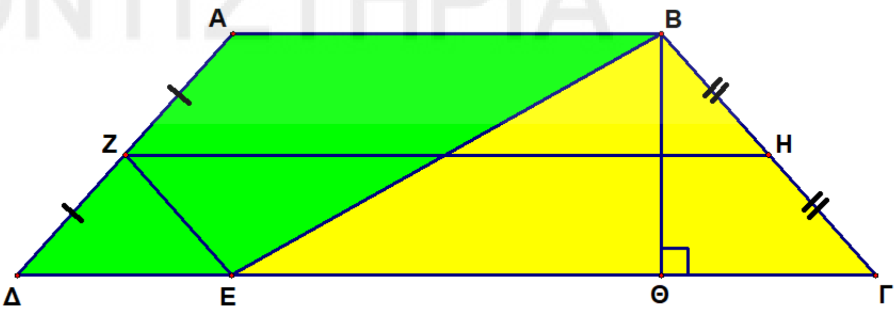
Είναι $\Gamma E \overset{//}{=} BH$, άρα ΑΒΓΕ παραλληλόγραμμο, άρα ΕΖ // ΒΓ.

2η λύση

Φέρνουμε τη διάμεσο ΖΗ και το ύψος ΒΘ του τραπεζίου.

$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\cdot(AB + \Gamma\Delta)\cdot B\Theta = ZH\cdot B\Theta$ και $(BE\Gamma) = \frac{1}{2}\cdot \Gamma E\cdot B\Theta$

Είναι $(BE\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta) \Leftrightarrow$



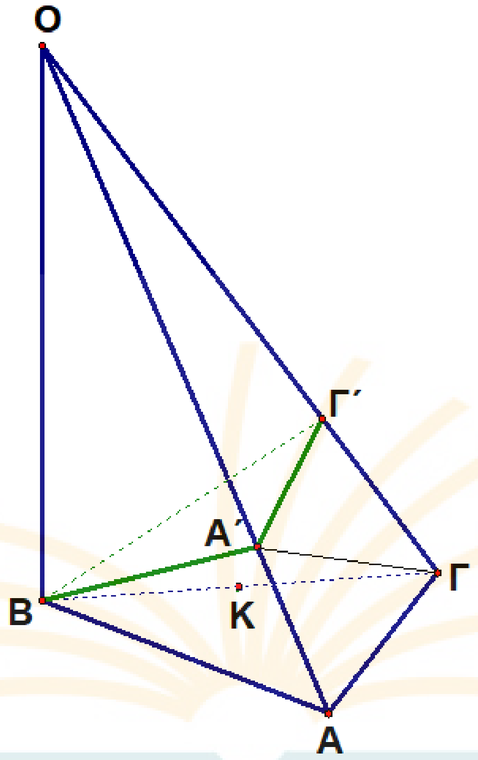
$\frac{1}{2}\cdot \Gamma E\cdot B\Theta = \frac{1}{2}\cdot ZH\cdot B\Theta \Leftrightarrow$

ΓΕ = ΖΗ

Είναι $\Gamma E \overset{//}{=} ZH$,

άρα το ΓΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΕΖ // ΒΓ.

Ζήτημα 2ο



ΟΓ $\perp$ (ΒΑ΄Γ΄), άρα η ΒΑ΄ είναι ορθογώνιος προς την ΟΓ

$$\left.\begin{array}{l} ΟΒ \perp (ΑΒΓ) \\ ΑΒ \perp ΑΓ \end{array}\right\} \Rightarrow ΑΓ \perp (ΟΑΒ)$$

ΑΓ $\perp$ (ΟΑΒ), άρα η ΒΑ΄ είναι ορθογώνιος προς την ΑΓ

Οι ΟΓ, ΑΓ είναι δύο τεμνόμενες ευθείες του επιπέδου ΟΑΓ και η ΒΑ΄ είναι ορθογώνιος προς αυτές, άρα ΒΑ΄ $\perp$ (ΟΑΓ)

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄ΒΓ και Γ΄ΒΓ έχουν κοινή υποτείνουσα ΒΓ, άρα τα σημεία Α, Β, Γ, Α΄ και Γ΄ ισαπέχουν από το μέσο Κ της ΒΓ.
Επομένως τα Α, Β, Γ, Α΄ και Γ΄ βρίσκονται σε επιφάνεια σφαίρας με κέντρο Κ και ακτίνα $\frac{ΒΓ}{2}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1ο

Είναι $1710^0 < x < 1800^0 \Leftrightarrow 4\cdot 360^0 + 270^0 < x < 5\cdot 360^0$

άρα το x βρίσκεται στο 4ο τεταρτημόριο

και ημx < 0, συνx >0, εφx < 0 και σφx < 0

- $25σφ^2x - 144 = 0 \Leftrightarrow σφ^2x = \frac{144}{25} \overset{σφx<0}{\Rightarrow} σφx = -\frac{12}{5}$
- $εφx = -\frac{5}{12}$
- $συν^2x = \frac{1}{1+εφ^2x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{1}{\frac{169}{144}} = \frac{144}{169} \overset{συνx>0}{\Rightarrow} συνx = \frac{12}{13}$
- $εφx = \frac{ημx}{συνx} \Leftrightarrow ημx = εφx\cdot συνx \Rightarrow ημx = -\frac{5}{12}\cdot\frac{12}{13} \Rightarrow ημx = -\frac{5}{13}$

$$y = 24εφx + 22ημx + 20συνx = 24\cdot\left(-\frac{5}{12}\right) + 22\cdot\left(-\frac{5}{13}\right) + 20\cdot\frac{12}{13}$$

$$= -10 - \frac{110}{13} + \frac{240}{13} = -10 + \frac{130}{13} = -10 + 10 = 0$$

Ζήτημα 2ο

$$(εφα - ημα)^2 + (1-συνα)^2 = \left(\frac{ημα}{συνα} - ημα\right)^2 + (1-συνα)^2$$

$$= \left[ημα\cdot\left(\frac{1}{συνα} - 1\right)\right]^2 + \left[συνα\cdot\left(\frac{1}{συνα} - 1\right)\right]^2$$

$$= ημ^2α\cdot\left(\frac{1}{συνα} - 1\right)^2 + συν^2α\cdot\left(\frac{1}{συνα} - 1\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{συνα} - 1\right)^2\cdot(ημ^2α + συν^2α)$$

$$= \left(\frac{1}{συνα} - 1\right)^2$$

$$= \left(1 - \frac{1}{συνα}\right)^2$$