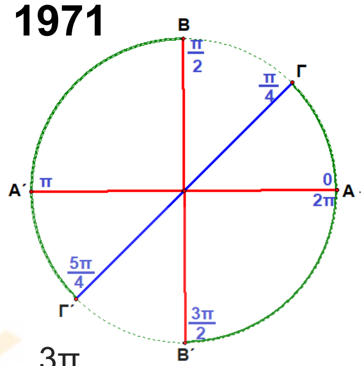
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Δευτέρα 6 Σεπτεμβρίου 1971



Ζήτημα 1^{ο}

$εφ(νx) < 1 \Rightarrow$

$εφ(νx) < εφ\frac{π}{4} \Rightarrow$

$λπ - \frac{π}{2} < νx < λπ + \frac{π}{4},\ λ \in Z$ ή

$2κπ \leq νx < 2κπ + \frac{π}{4}$ ή $2κπ + \frac{π}{2} < νx < 2κπ + \frac{5π}{4}$ ή $2κπ + \frac{3π}{2} < νx < 2κπ + 2π,\ κ \in Z$

$\frac{2κπ}{ν} \leq x < \frac{(8κ+1)π}{4ν}$ ή $\frac{(4κ+1)π}{2ν} < x < \frac{(8κ+5)π}{4ν}$ ή $\frac{(4κ+3)π}{2ν} < x < \frac{2(κ+1)π}{ν},\ κ \in Z$

Πρέπει $0 \leq x < 2π$, άρα $\begin{cases} \frac{2κπ}{ν} \geq 0,\ \frac{(4κ+1)π}{2ν} \geq 0,\ \frac{(4κ+3)π}{2ν} \geq 0, \\ \frac{(8κ+1)π}{4ν} < 2π,\ \frac{(8κ+5)π}{4ν} < 2π,\ \frac{2(κ+1)π}{ν} < 2π \end{cases}$

δηλαδή $0 \leq κ \leq ν - 1$

Επομένως $x \in \left[0,\frac{π}{4ν}\right) \cup \left(\frac{π}{2ν},\frac{5π}{4ν}\right) \cup \left(\frac{3π}{2ν},\frac{9π}{4ν}\right) \cup ... \cup \left(2π-\frac{3π}{2ν}, 2π-\frac{3π}{4ν}\right) \cup \left(2π-\frac{π}{2ν}, 2π\right)$

Για ν = 1 : κ = 0 και

$x \in \left[0,\frac{π}{4}\right) \cup \left(\frac{π}{2},\frac{5π}{4}\right) \cup \left(\frac{3π}{2},2π\right)$

Για ν = 2 : κ = 0 ή 1 και

$x \in \left[0,\frac{π}{8}\right) \cup \left(\frac{π}{4},\frac{5π}{8}\right) \cup \left(\frac{3π}{4},\frac{9π}{8}\right) \cup \left(\frac{5π}{4},\frac{13π}{8}\right) \cup \left(\frac{7π}{2},2π\right)$

Για ν = 3 : κ = 0 ή 1 ή 2 και

$x \in \left[0,\frac{π}{12}\right) \cup \left(\frac{π}{6},\frac{5π}{12}\right) \cup \left(\frac{3π}{6},\frac{9π}{12}\right) \cup \left(\frac{5π}{6},\frac{13π}{12}\right) \cup \left(\frac{7π}{6},\frac{17π}{12}\right) \cup \left(\frac{9π}{6},\frac{21π}{12}\right) \cup \left(\frac{11π}{6},2π\right)$

Για ν = 4 : κ = 0 ή 1 ή 2 ή 3 και

$x \in \left[0,\frac{π}{16}\right) \cup \left(\frac{π}{8},\frac{5π}{16}\right) \cup \left(\frac{3π}{8},\frac{9π}{16}\right) \cup \left(\frac{5π}{8},\frac{13π}{16}\right) \cup \left(\frac{7π}{8},\frac{17π}{16}\right) \cup \left(\frac{9π}{8},\frac{21π}{16}\right) \cup \left(\frac{11π}{8},\frac{25π}{16}\right) \cup \left(\frac{13π}{8},\frac{29π}{16}\right) \cup \left(\frac{15π}{8},2π\right)$

Ζήτημα 2ο

$$\frac{\etaμ(x+y+z)}{συνx\cdot συνy\cdot συνz} = εφx + εφy + εφz - εφx\cdot εφy\cdot εφz$$

$$= \frac{β-γ}{α} + \frac{γ-α}{β} + \frac{α-β}{γ} - \frac{β-γ}{α}\cdot\frac{γ-α}{β}\cdot\frac{α-β}{γ}$$

$$= \frac{βγ(β-γ) + αγ(γ-α) + αβ(α-β) - (β-γ)\cdot(γ-α)\cdot(α-β)}{αβγ}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{-(β-γ)\cdot(γ-α)\cdot(α-β) - (β-γ)\cdot(γ-α)\cdot(α-β)}{αβγ}$$

$$= \frac{-2(β-γ)\cdot(γ-α)\cdot(α-β)}{αβγ}$$

$$= -2\cdot\frac{β-γ}{α}\cdot\frac{γ-α}{β}\cdot\frac{α-β}{γ}$$

$$= -2\cdot εφx\cdot εφy\cdot εφz$$

$$= -2\cdot\frac{ημx}{συνx}\cdot\frac{ημy}{συνy}\cdot\frac{ημz}{συνz}$$

$$= \frac{-2\cdot ημx\cdot ημy\cdot ημz}{συνx\cdot συνy\cdot συνz}$$

Άρα $ημ(x+y+z) = -2\cdot ημx\cdot ημy\cdot ημz \Leftrightarrow$

$ημx\cdot ημy\cdot ημz = -\frac{1}{2}ημ(x+y+z) \Rightarrow$

$|ημx\cdot ημy\cdot ημz| = \left|-\frac{1}{2}ημ(x+y+z)\right| \Rightarrow$

$|ημx\cdot ημy\cdot ημz| = \frac{1}{2}|ημ(x+y+z)| \le \frac{1}{2}$, διότι $|ημ(x+y+z)| \le 1$

Επομένως $|ημx\cdot ημy\cdot ημz| \le \frac{1}{2}$.

(*) $-(β-γ)\cdot(γ-α)\cdot(α-β) = (γ-β)\cdot(αγ-βγ-α^2+αβ)$

$= αγ^2 - βγ^2 - α^2γ + \cancel{αβγ} - \cancel{αβγ} + β^2γ + α^2β - αβ^2$

$= β^2γ - βγ^2 + αγ^2 - α^2γ + α^2β - αβ^2$

$= βγ(β-γ) + αγ(γ-α) + αβ(α-β)$

Ζήτημα 3ο

1η λύση

Για $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$, άρα και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ είναι :

$$συν^2x + \frac{1}{συν^2x} > ημx + συνx + εφx \quad \Leftrightarrow$$

$$συν^2x + 1 + εφ^2x > ημx + συνx + εφx \quad \overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}$$

$$2συν^2x + 2 + 2εφ^2x > 2ημx + 2συνx + 2εφx \quad \Leftrightarrow$$

$$συν^2x - 2συνx + 1 + εφ^2x - 2εφx + 1 + συν^2x - 2ημx + εφ^2x > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(συνx - 1)^2 + (εφx - 1)^2 + (συνx - εφx)^2 > 0$$

που ισχύει διότι $(συνx - 1)^2 \geq 0$, $(εφx - 1)^2 \geq 0$, $(συνx - εφx)^2 \geq 0$

και δεν ισχύουν συγχρόνως $συνx = εφx = 1$

2η λύση

Ισχύει $α^2 + β^2 + γ^2 - αβ - βγ - γα = \frac{1}{2}\cdot[(α - β)^2 + (β - γ)^2 + (γ - α)^2] \geq 0$
άρα $α^2 + β^2 + γ^2 - αβ - βγ - γα \geq 0$
και το "=" ισχύει μόνο όταν $α = β = γ$.

Για $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in Z$, άρα και για $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ και για

$α = συνx$, $β = εφx$ και $γ = 1$, έχουμε $α \neq γ$ ή $β \neq γ$, οπότε

$$συν^2x + εφ^2x + 1 - συνx \cdot εφx - συνx - εφx > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$συν^2x + \frac{1}{συν^2x} - ημx - συνx - εφx > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$συν^2x + \frac{1}{συν^2x} > ημx + συνx + εφx$$