ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
(ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ - ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Πέμπτη 9 Σεπτεμβρίου 1971

Ζήτημα 1ο

§ 208. *Θεώρημα Ι.* Ἂν **ΑΜ** εἶναι διάμεσος τριγώνου **ΑΒΓ** (σχ. 158) θὰ εἶναι:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2\,(AM)^2 + 2\,(BM)^2 \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις α') Ἂν ΑΒ = ΑΓ, τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ εἶναι ὀρθογώνια (σχ. 158 α') καὶ ἑπομένως

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2$$
$$(A\Gamma)^2 = (AM)^2 + (\Gamma M)^2 = (AM)^2 + (BM)^2$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AM)^2 + 2(BM)^2, \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

β') Ἂν ΑΓ > ΑΒ (σχ. 158 β'), θὰ εἶναι καὶ ω > φ (§ 76 Πόρ. 111). Ἕνεκα δὲ ταύτης καὶ τῆς ω + φ = 2 ὀρθ., εἶναι ω > 1 ὀρθ. καὶ φ < 1 ὀρθ.

Ἐὰν δὲ ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἀντιστοίχως εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΜ, ΑΜΓ εὑρίσκομεν ὅτι:

$$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 - 2(BM)(\Delta M)$$

καὶ

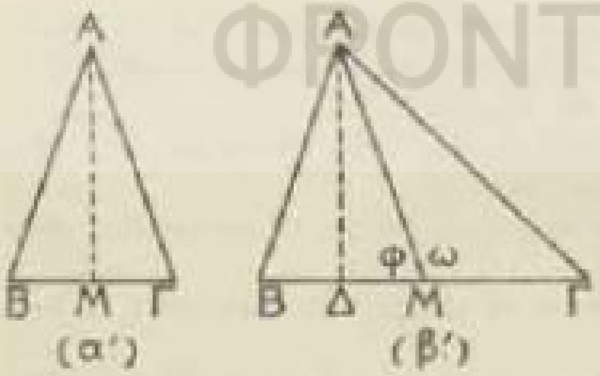
$$(A\Gamma)^2 = (AM)^2 + (M\Gamma)^2 + 2(M\Gamma)(\Delta M) = (AM)^2 + (BM)^2 + 2(BM)(\Delta M)$$

Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν πάλιν ὅτι:

$$(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 2(AM)^2 + 2(BM)^2 \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

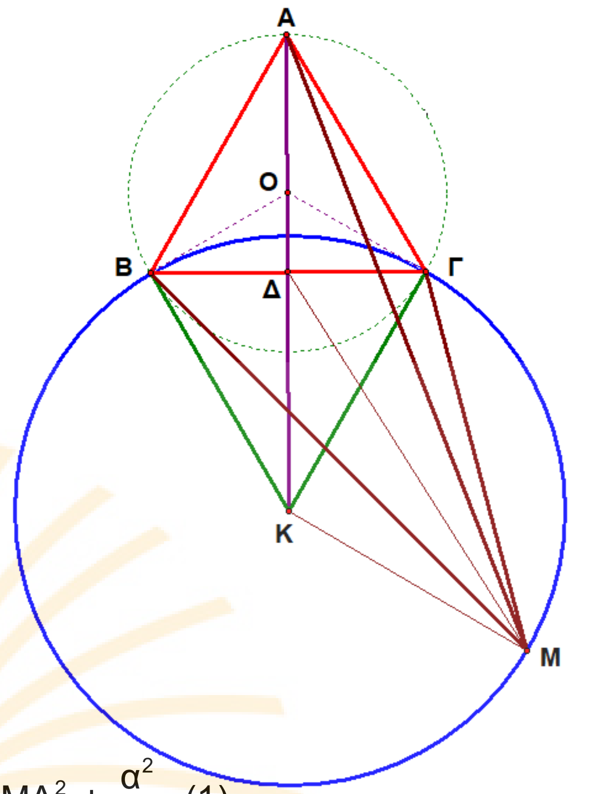
Ἀπεδείχθη λοιπὸν ἡ ἰσότης (1), ἤτοι:

Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τετραγώνου τῆς μεταξὺ αὐτῶν διαμέσου καὶ τοῦ διπλασίου τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης πλευρᾶς.



Σχ. 158

Ζήτημα 2ο



Έστω Κ το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από τα Β, Γ και εφάπτεται στα ΟΒ, ΟΓ.

Είναι $\hat{\Gamma B K} = \hat{B\Gamma K} = 60^0$,

άρα και το $\overset{\Delta}{K B \Gamma}$ είναι ισόπλευρο

και ίσο με το $\overset{\Delta}{A B \Gamma}$.

ΚΜ = ΚΒ = ΚΓ = ΒΓ = ΑΒ = ΑΓ = α

Το ΑΒΚΓ είναι ρόμβος με πλευρά α και οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Δ.

• 1ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{M B \Gamma}$:

$$MB^2 + M\Gamma^2 = 2M\Delta^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow MB^2 + M\Gamma^2 = 2M\Delta^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1)$$

• 1ο θεώρημα διαμέσων στο $\overset{\Delta}{M K A}$:

$$MA^2 + MK^2 = 2M\Delta^2 + \frac{AK^2}{2} \overset{AK = 2A\Delta}{\Leftrightarrow} MA^2 + MK^2 = 2M\Delta^2 + 2A\Delta^2 \quad (2)$$

• Το ΑΔ είναι ύψος στο ισόπλευρο $\overset{\Delta}{A B \Gamma}$, άρα $A\Delta = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ (3)

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} MA^2 + MK^2 = 2M\Delta^2 + 2\left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

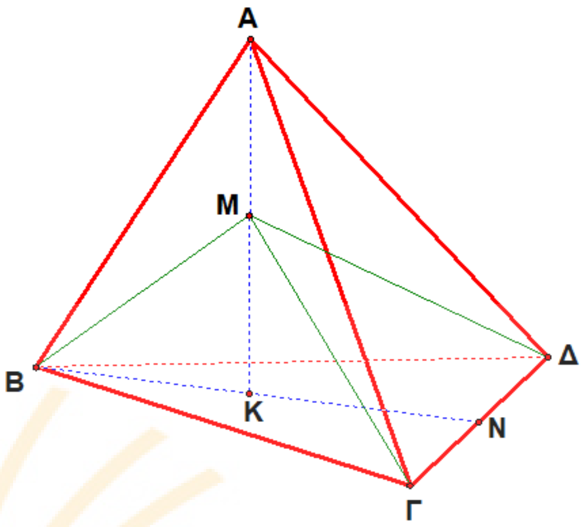
$$MA^2 + \alpha^2 = 2M\Delta^2 + \frac{3\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$MA^2 = 2M\Delta^2 + \frac{3\alpha^2}{2} - \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$MA^2 = 2M\Delta^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (4)$$

Από (1) και (4) έχουμε $\boxed{\mathbf{MB^2 + M\Gamma^2 = MA^2}}$

Ζήτημα 3ο



Έστω ΑΚ το ύψος του τετράεδρου

(Κ το βαρύκεντρο του $\overset{\Delta}{\text{ΒΓΔ}}$)

Μ είναι το μέσο του ΑΚ

Το ΒΝ είναι ύψος στο ισόπλευρο $\overset{\Delta}{\text{ΒΓΔ}}$,

άρα $\text{ΒΝ} = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

$$\text{ΒΚ} = \frac{2}{3}\cdot\text{ΒΝ} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΚ}}$:

$$\text{ΑΚ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΚ}^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9} \Rightarrow \text{ΑΚ} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{3}$$

$$\text{ΜΚ} = \frac{\text{ΑΚ}}{2} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{6}}{3}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΚ}}$:

$$\text{ΜΒ}^2 = \text{ΜΚ}^2 + \text{ΒΚ}^2 = \left(\frac{\alpha\sqrt{6}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6\alpha^2}{36} + \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{18\alpha^2}{36} = \frac{2\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$\text{ΜΒ} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$, άρα και $\text{ΜΓ} = \text{ΜΔ} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$

Στο $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΓ}}$ είναι : $\text{ΜΒ}^2 + \text{ΜΓ}^2 = \left(\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{2\alpha^2}{4} + \dfrac{2\alpha^2}{4} = \alpha^2 = \text{ΒΓ}^2$

άρα το $\overset{\Delta}{\text{ΒΜΓ}}$ είναι ορθογώνιο και $\text{ΜΒ} \perp \text{ΜΓ}$.

Όμοια τα $\overset{\Delta}{\text{ΓΜΔ}}$, $\overset{\Delta}{\text{ΔΜΒ}}$ είναι ορθογώνια και $\text{ΜΓ} \perp \text{ΜΔ}$ και $\text{ΜΔ} \perp \text{ΜΒ}$.

Επομένως **οι ΜΒ, ΜΓ και ΜΔ τέμνονται ανά δύο κάθετα**.