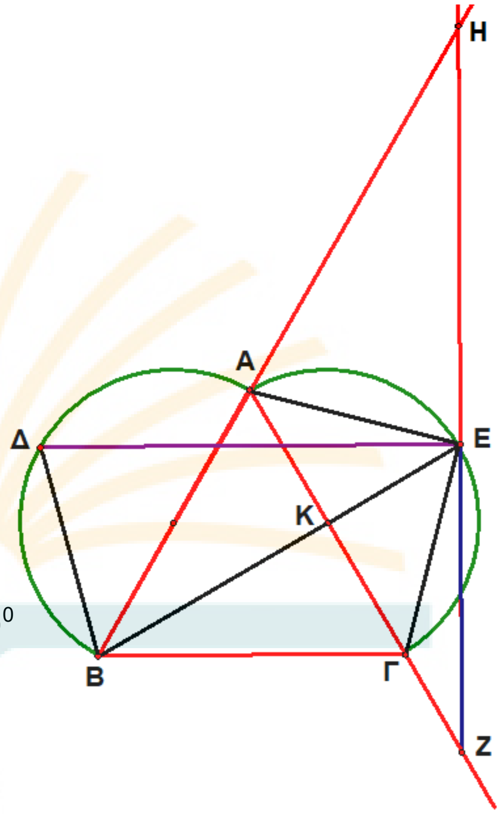
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1971
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Τετάρτη 8 Σεπτεμβρίου 1971

Ζήτημα 1^{o}



Είναι ΒΑ = ΒΓ και ΕΑ = ΕΓ
άρα η ΕΒ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ.

Στο ορθογώνιο $\overset{\triangle}{KEZ}$ είναι

$KE = KA = K\Gamma = \dfrac{A\Gamma}{2} = \dfrac{E\Gamma}{2}$, άρα $\hat{Z} = 30^0$.

$Z\hat{A}H = 180^0 - B\hat{A}\Gamma = 180^0 - 60^0 = 120^0$

Στο $\overset{\triangle}{AZH}$ έχουμε:

$\hat{H} = 180^0 - (\hat{Z} + Z\hat{A}H) = 180^0 - (30^0 + 120^0) = 30^0$

Επίσης $E\hat{B}H = \dfrac{1}{2}\cdot A\hat{B}\Gamma = \dfrac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0$

Είναι $E\hat{B}H = \hat{H} = 30^0$, άρα το $\overset{\triangle}{EBH}$ είναι ισοσκελές με ΕΗ = ΕΒ (1)

$\Delta\hat{B}A = \dfrac{1}{2}\cdot \overset{\frown}{A\Delta} = \dfrac{1}{2}\cdot 60^0 = 30^0$

$\Delta\hat{B}E = E\hat{B}H + \Delta\hat{B}A = E\hat{B}H + \dfrac{1}{2}\cdot A\hat{B}\Gamma = 45^0 + 30^0 = 75^0$

Είναι ΔΕ // ΒΓ, άρα $\Delta\hat{E}B = E\hat{B}\Gamma = 30^0$ (εντός εναλλάξ)

$\overset{\triangle}{\Delta EB}$: $E\hat{\Delta}B = 180^0 - (\Delta\hat{B}E + \Delta\hat{E}B) = 180^0 - (75^0 + 30^0) = 75^0$

άρα $E\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}E = 75^0$

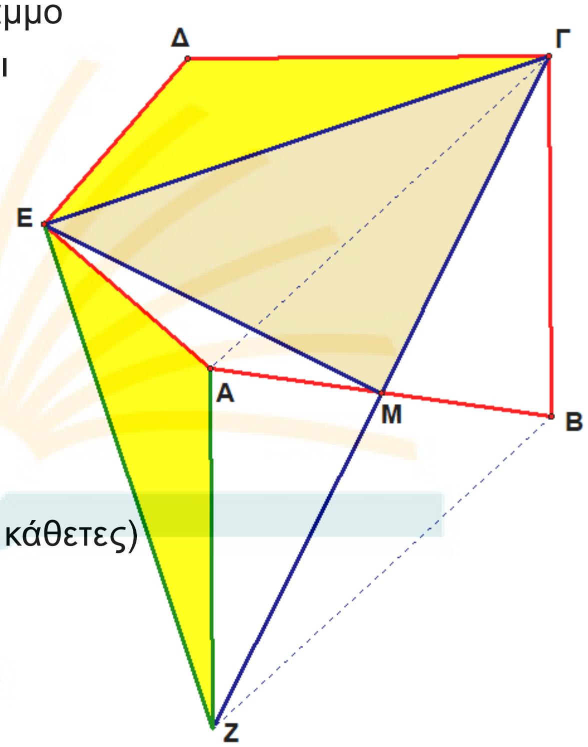
δηλαδή το $\overset{\triangle}{E\Delta B}$ είναι ισοσκελές με ΕΔ = ΕΒ (2)

Από (1) και (2) έχουμε **ΕΔ = ΕΗ**.

Ζήτημα 2^{ο}

1^{η} λύση

Έστω Ζ το συμμετρικό του Γ ως προς το Μ.



Το τετράπλευρο ΑΓΒΖ είναι παραλληλόγραμμο
διότι οι διαγώνιοί του ΑΒ, ΓΖ διχοτομούνται
άρα ΑΖ = ΒΓ και
$AZ \parallel B\Gamma \perp \Gamma\Delta$.

Συγκρίνουμε τα $\overset{\Delta}{AEZ}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$.
Έχουν :
1) ΑΕ = ΔΕ,
2) ΑΖ = ΓΔ (ίσες με την ΒΓ) και
3) $Z\hat{A}E = \Gamma\hat{\Delta}E$ (αμβλείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Άρα $\overset{\Delta}{AEZ} = \overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$

και $\begin{cases} EZ = \Gamma E \\ A\hat{E}Z = \Gamma\hat{E}\Delta \end{cases}$

$$Z\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z + A\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta + A\hat{E}\Gamma = A\hat{E}\Delta = 90^0$$

Είναι $EZ = \Gamma E$ και $Z\hat{E}\Gamma = 90^0$, άρα
το $\overset{\Delta}{\Gamma EZ}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές
και επειδή ΕΜ είναι διάμεσος, διχοτόμος και ύψος,
τότε και **το $\overset{\Delta}{\Gamma ME}$ είναι** επίσης **ορθογώνιο και ισοσκελές**.

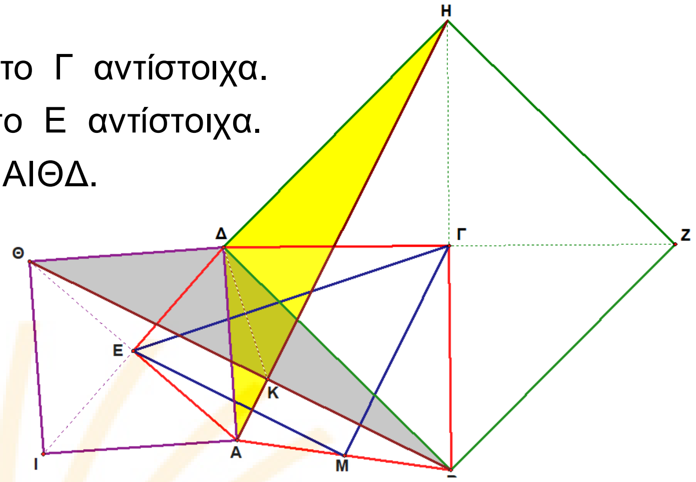
2η λύση

Έστω ότι :

Ζ, Η τα συμμετρικά των Β, Δ ως προς το Γ αντίστοιχα.

Θ, Ι τα συμμετρικά των Α, Δ ως προς το Ε αντίστοιχα.

Σχηματίζουμε τα τετράγωνα ΒΖΗΔ και ΑΙΘΔ.



Συγκρίνουμε τα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta H}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta\Theta}}$.

Έχουν :

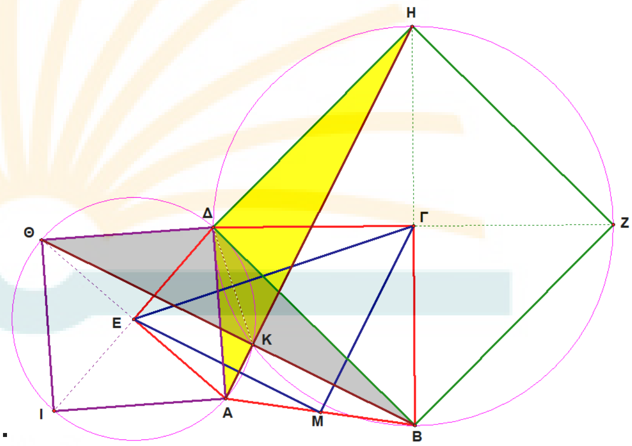
1) ΑΔ = ΔΘ (ΑΙΘΔ τετράγωνο)

2) ΔΗ = ΔΒ (ΒΖΗΔ τετράγωνο)

3) $\mathrm{A\hat{\Delta}H} = \mathrm{B\hat{\Delta}E}$ (ίσες με $\mathrm{B\hat{\Delta}A} + 90^0$)

Άρα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta H}} = \overset{\triangle}{\mathrm{B\Delta\Theta}}$

και $\begin{cases} \mathrm{AH = B\Theta} \\ \mathrm{\Delta\hat{A}H} = \mathrm{\Delta\hat{\Theta}B} \\ \mathrm{A\hat{H}\Delta} = \mathrm{\Delta\hat{B}\Theta} \end{cases}$



Έστω Κ το σημείο τομής των ΑΗ, ΒΘ.

$\mathrm{\Delta\hat{A}K} = \mathrm{\Delta\hat{\Theta}K}$, άρα το τετράπλευρο ΑΚΔΘ είναι εγγράψιμο και

$\mathrm{\Delta\hat{K}\Theta} = \frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{\mathrm{\Delta\Theta}} = \frac{1}{2}\cdot 90^0 = 45^0$

$\mathrm{K\hat{H}\Delta} = \mathrm{K\hat{B}\Delta}$, άρα το τετράπλευρο ΒΗΔΚ είναι εγγράψιμο και

$\mathrm{\Delta\hat{K}H} = \frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{\mathrm{\Delta H}} = \frac{1}{2}\cdot 90^0 = 45^0$

$\mathrm{\Theta\hat{K}H} = \mathrm{\Delta\hat{K}\Theta} + \mathrm{\Delta\hat{K}H} = 45^0 + 45^0 = 90^0$, άρα $\mathrm{AH} \perp \mathrm{B\Theta}$ (1)

Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Theta}}$ είναι Μ, Ε μέσα των ΑΒ, ΑΘ αντίστοιχα, άρα $\mathrm{ME} \overset{//}{=} \frac{\mathrm{B\Theta}}{2}$ (2)

Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{ABH}}$ είναι Μ, Γ μέσα των ΒΑ, ΒΗ αντίστοιχα, άρα $\mathrm{M\Gamma} \overset{//}{=} \frac{\mathrm{AH}}{2}$ (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε ΜΕ = ΜΓ και $\mathrm{ME} \perp \mathrm{M\Gamma}$, άρα

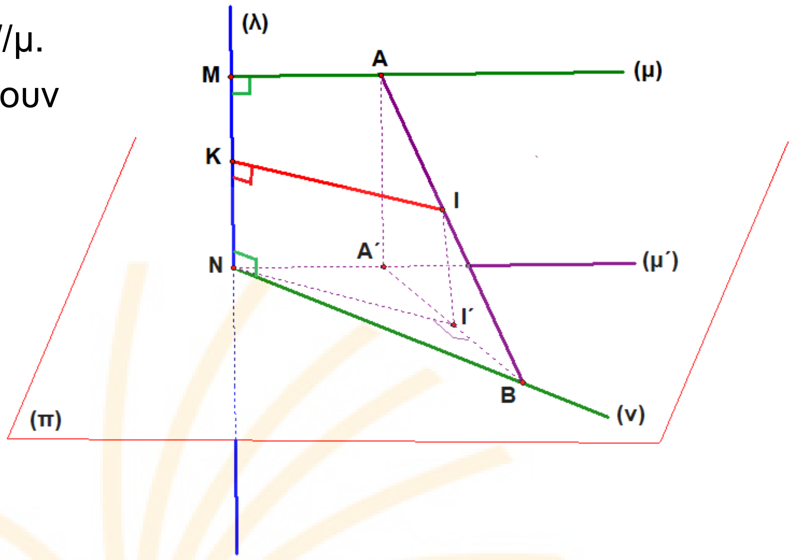
το $\overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma ME}}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Ζήτημα 3^o

Από το Ν φέρνουμε ευθεία μ΄//μ.
Έστω (π) το επίπεδο που ορίζουν
οι ευθείες μ΄ και ν.

ΚΙ είναι η κοινή κάθετος
των ευθειών λ και ΑΒ.

Φέρνουμε Α΄, Ι΄ τις προβολές
των Α, Ι στο (π) αντίστοιχα.



Η $\hat{KIA}$ είναι ορθή και ΚΙ//(π), άρα και η $\hat{NI'A'}$

(η προβολή της $\hat{KIA}$ στο π) είναι επίσης ορθή.

Είναι : ΝΑ΄ = ΜΑ = α, ΝΒ = β και

$BA' = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{AB^2 - MN^2} = \sqrt{\delta^2 - \gamma^2} = x$

Αν τ είναι η ημιπερίμετρος του $\overset{\Delta}{BA'N}$, τότε $\tau = \dfrac{\alpha + \beta + x}{2}$

και το ύψος ΝΙ΄ του $\overset{\Delta}{BA'N}$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{NI' = \frac{2}{x}\cdot\sqrt{\tau\cdot(\tau-\alpha)\cdot(\tau-\beta)\cdot(\tau-x)},\ \text{όπου}\ x = \sqrt{\delta^2 - \gamma^2}\ \text{και}\ \tau = \frac{\alpha+\beta+x}{2}}.$$

Διερεύνηση :

Αν μ, ν είναι ορθογώνιοι, τότε το $\overset{\Delta}{BA'N}$ είναι ορθογώνιο στο Ν
και το ΝΙ΄ είναι το ύψος προς την υποτείνουσα ΒΑ΄, άρα

$$NI' = \frac{NB\cdot NA'}{BA'} = \frac{\beta\cdot\alpha}{x} = \frac{\boldsymbol{\alpha\cdot\beta}}{\boldsymbol{\sqrt{\delta^2 - \gamma^2}}} \text{ ή } \frac{\boldsymbol{\alpha\cdot\beta}}{\boldsymbol{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}$$