ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Πέμπτη 3 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1°

Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β είναι 1,
άρα υπάρχουν ακέραιοι κ, λ τέτοιοι ώστε $\alpha \cdot \kappa + \beta \cdot \lambda = 1$.
Πολλαπλασιάζοντας επί γ έχουμε $\alpha \cdot (\kappa \cdot \gamma) + \beta \cdot (\lambda \cdot \gamma) = \gamma$.
Επομένως η εξίσωση έχει ακέραιη λύση $(x, y) = (\kappa \cdot \gamma, \lambda \cdot \gamma)$.

Λύση Αρ. Πάλλα

$$\alpha x + \beta y = \gamma \quad (1)$$

Λύομεν τὴν (1) ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συντελεστήν. Ἐὰν συνεπῶς $\beta < \alpha$ θὰ ἔχωμεν: $y = \dfrac{\gamma - \alpha x}{\beta}$ (2). Ὑποθέτομεν $\beta > 0$, διότι ἐὰν $\beta < 0$ γράφομεν τὴν (2) οὕτω $y = \dfrac{\alpha x - \gamma}{-\beta}$.

Δίδομεν εἰς τὸ x τὰς τιμὰς 0, 1, 2. 3,…, (β—1), ὅτε θὰ ἔχωμεν διὰ τὸ y ἀντιστοίχως τὰς τιμάς:

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta}, \quad \frac{\gamma - 2\alpha}{\beta}, \quad \frac{\gamma - 3\alpha}{\beta}, \ldots, \quad \frac{\gamma - (\beta - 1)\alpha}{\beta} \quad (A).$$

Ἐὰν ἐκ τῶν τιμῶν αὐτῶν μία εἶναι ἀκεραία, τότε ἐδείχθη ἡ ὕπαρξις ἀκεραίας λύσεως.

Ἔστωσαν $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\beta-1}$ ἀντιστοίχως τὰ ὑπόλοιπα (1) τῶν διαιρέσεων:

$$\gamma : \beta, \ (\gamma - \alpha) : \beta, \ (\gamma - 2\alpha) : \beta, \ (\gamma - 3\alpha) : \beta, \ldots, [\gamma - (\beta - 1)\alpha] : \beta$$

Τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ εἶναι β τὸ πλῆθος καὶ μικρότερα τοῦ β. Ἐὰν συνεπῶς δείξωμεν ὅτι τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ εἶναι διάφορα μεταξύ των, τότε ἀναγκαίως ἓν ἐξ αὐτῶν θὰ εἶναι μηδέν. Ἔστωσαν τὰ ὑπόλοιπα υ_k καὶ υ_λ ἴσα μεταξύ των. Τὰ ὑπόλοιπα αὐτὰ ἀνήκουν εἰς τὰς διαιρέσεις $(\gamma - k\alpha) : \beta$, $(\gamma - \lambda\alpha) : \beta$, ἔνθα k, λ θετικοὶ ἀκέραιοι μικρότεροι τοῦ β καὶ $k \neq \lambda$. Ἐὰν συνεπῶς π_k καὶ π_λ εἶναι τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων αὐτῶν θὰ ἔχωμεν:

$$\gamma - k\alpha = \beta . \pi_k + \upsilon_k \quad (3), \qquad \gamma - \lambda\alpha = \beta \cdot \pi_\lambda + \upsilon_\lambda \quad (4).$$

Ἀφαιροῦντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν: $\alpha(\lambda - k) = \beta(\pi_k - \pi_\lambda)$. Ἐκ ταύτης συνάγομεν ὅτι ὁ β διαιρεῖ τὰ $\alpha(\lambda - k)$, ὅτε, ὡς πρῶτος πρὸς τὸν α, θὰ διαιρῇ τὸν $\lambda - k$. Τοῦτο ὅμως ἄτοπον, διότι ὁ $\lambda - k$ εἶναι μικρότερος τοῦ β. Ἄρα τὰ ὑπόλοιπα $\upsilon_0, \upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_{\beta-1}$ εἶναι διάφορα μεταξύ των καὶ συνεπῶς ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδέν, ὅτε ἐκ τῶν τιμῶν (A) τοῦ y μία εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι ὑπάρχει ἀκεραία λύσις.

(1) Τὰ ὑπόλοιπα δύνανται νὰ θεωροῦνται θετικοί, διότι ἐὰν ἓν ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀρνητικὸν δυνάμεθα νὰ τὸ κάμωμεν θετικόν· π.χ. $-5 \,|\, \underline{3}$ ὑπόλοιπον -2 καὶ πηλίκον -1, λαμβάνομεν πηλίκον -2, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 1.

Ζήτημα 2ο

1η λύση

Θέτουμε $\alpha = x + y$, $\beta = y + z$ και $\gamma = z + x$ και έχουμε :
$\alpha + \beta + \gamma = 2\tau \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z = 2\tau \Leftrightarrow x + y + z = \tau$
Επομένως $\tau - \alpha = z$, $\tau - \beta = x$ και $\tau - \gamma = y$.

α) $\dfrac{\alpha}{\tau-\alpha} + \dfrac{\beta}{\tau-\beta} + \dfrac{\gamma}{\tau-\gamma} = -2 + \dfrac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \Leftrightarrow$

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + 2 = \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} \Leftrightarrow$$

$$xy(x+y) + yz(y+z) + xz(z+x) + 2xyz = (x+y)(y+z)(z+x) \Leftrightarrow$$

$$x^2y + xy^2 + y^2z + yz^2 + xz^2 + x^2z + 2xyz = (xy + xz + y^2 + yz)\cdot(z+x) \Leftrightarrow$$

$$x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+xz^2+x^2z+2xyz = xyz+x^2y+xz^2+x^2z+y^2z+xy^2+yz^2+xyz$$

που ισχύει

άρα $\boldsymbol{\dfrac{\alpha}{\tau-\alpha} + \dfrac{\beta}{\tau-\beta} + \dfrac{\gamma}{\tau-\gamma} = -2 + \dfrac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$ **(1)**

β) $\alpha(\tau-\alpha)^2 + \beta(\tau-\beta)^2 + \gamma(\tau-\gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$(x+y)z^2 + (y+z)x^2 + (z+x)y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$xz^2 + yz^2 + x^2y + x^2z + y^2z + xy^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$xz(z+x) + yz(y+z) + xy(x+y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\tau-\alpha} + \frac{\beta}{\tau-\beta} + \frac{\gamma}{\tau-\gamma} = 0 \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε

$$-2 + \frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\tau-\alpha}\cdot\frac{\beta}{\tau-\beta}\cdot\frac{\gamma}{\tau-\gamma} = 2 \quad (3)$$

Από (2) και την ταυτότητα του Euler έχουμε

$$\left(\frac{\alpha}{\tau-\alpha}\right)^3 + \left(\frac{\beta}{\tau-\beta}\right)^3 + \left(\frac{\gamma}{\tau-\gamma}\right)^3 = 3\cdot\frac{\alpha}{\tau-\alpha}\cdot\frac{\beta}{\tau-\beta}\cdot\frac{\gamma}{\tau-\gamma} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$$\boldsymbol{\frac{\alpha^3}{(\tau-\alpha)^3} + \frac{\beta^3}{(\tau-\beta)^3} + \frac{\gamma^3}{(\tau-\gamma)^3} = 6}$$

$2^{η}$ λύση (Αρ. Πάλλα)

Ἐὰν $α+β+γ=2τ$ (1)

$$\frac{α}{τ-α}+\frac{β}{τ-β}+\frac{γ}{τ-γ}=-2+\frac{αβγ}{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)} \quad (2)$$

$$α(τ-α)^2+β(τ-β)^2+γ(τ-γ)^2=0 \quad (3)$$

$$\frac{α^3}{(τ-α)^3}+\frac{β^3}{(τ-β)^3}+\frac{γ^3}{(τ-γ)^3}=6 \quad (4).$$

α΄) Ἡ (2) γράφεται:

$$α(τ-β)(τ-γ)+β(τ-α)(τ-γ)+γ(τ-α)(τ-β)+2(τ-α)(τ-β)(τ-γ)=αβγ \quad (5).$$

Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς (5). Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς (5), τὸ ὁποῖον καλοῦμεν Α, λαμβάνομεν:

$$A\equiv 2τ^3-2τ^2(α+β+γ)+2τ(αβ+αγ+βγ)-2αβγ+τ^2(α+β+γ)-2τ(αβ+βγ+γα)+3αβγ$$

καὶ ἐπειδὴ $α+β+γ=2τ$ προκύπτει $A\equiv 2τ^3-2τ^3+αβγ$, ἢ $A=αβγ$ ὅ.ἔ.δ.

β΄) Παριστῶ διὰ Α τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) καὶ διὰ Β τὸν ἀριθμητὴν τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) ἤτοι:

$$A\equiv α(τ-α)^2+β(τ-β)^2+γ(τ-γ)^2, \quad B\equiv α(τ-β)(τ-γ)+β(τ-α)(τ-γ)+γ(τ-α)(τ-β).$$

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις λαμβάνομεν:

$$A\equiv(α+β+γ)τ^2-2τ(α^2+β^2+γ^2)+α^3+β^3+γ^3,$$

$$B\equiv(α+β+γ)τ^2-2τ(αβ+βγ+γα)+3αβγ.$$

Ἀφαιροῦντες αὐτὰς κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$A-B=-2τ(α^2+β^2+γ^2-αβ-βγ-γα)+(α^3+β^3+γ^3-3αβγ).$$

Αὕτη, ἐπειδὴ εἶναι:

$$2(α^2+β^2+γ^2-αβ-βγ-γα)=(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2 \quad \text{καὶ}$$

$$α^3+β^3+γ^3-3αβγ=\frac{1}{2}(α+β+γ)\left[(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2\right], \quad \text{γράφεται:}$$

$$A-B=\left[(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2\right]\left[\frac{1}{2}(α+β+γ)-τ\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(α-β)^2+(β-γ)^2+(γ-α)^2\right](α+β+γ-2τ).$$

Ἐκ ταύτης, λόγῳ τῆς (1), λαμβάνομεν $A-B=0$ καὶ ἐπειδή, λόγῳ τῆς (3), εἶναι $A=0$ ἔχομεν καὶ $B=0$, ἤτοι $α(τ-β)(τ-γ)+β(τ-α)(τ-γ)+γ(τ-α)(τ-β)=0$, ἢ $\frac{α}{τ-α}+\frac{β}{τ-β}+\frac{γ}{τ-γ}=0$ (6). Λόγῳ ταύτης ἡ (2) δίδει: $\frac{αβγ}{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}=2$ (7).

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ $\frac{α}{τ-α}$, $\frac{β}{τ-β}$, $\frac{γ}{τ-γ}$, λόγῳ τῆς (6), ἔχουν ἄθροισμα μηδέν, τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων των θὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ τριπλάσιον γινόμενόν τους. Ἄρα:

$$\frac{α^3}{(τ-α)^3}+\frac{β^3}{(τ-β)^3}+\frac{γ^3}{(τ-γ)^3}=3\frac{αβγ}{(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}, \quad \text{ἤ, λόγῳ τῆς (7),}$$

$$\frac{α^3}{(τ-α)^3}+\frac{β^3}{(τ-β)^3}+\frac{γ^3}{(τ-γ)^3}=6 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

3η λύση (Παν. Βασιλειάδη)

$$\frac{\alpha}{\tau-\alpha}+\frac{\beta}{\tau-\beta}+\frac{\gamma}{\tau-\gamma}\equiv -2+\frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \qquad (1)$$

α) $(1) \Longleftrightarrow \alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)\equiv -2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha\beta\gamma$

$$\Longleftrightarrow \alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+$$
$$+2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)-\alpha\beta\gamma\equiv 0 \quad (2)$$

Θέτοντες $\tau=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ καὶ καλοῦντες $\phi(\alpha,\beta,\gamma)$ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (2) παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\phi(\alpha,\beta,\gamma)$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς α,β,γ.

Παρατηροῦμεν ὅτι $\phi(\tau,\beta,\gamma)=0$, $\phi(\alpha,\tau,\gamma)=0$, $\phi(\alpha,\beta,\tau)=0$ καὶ συνεπῶς

$$\phi(\alpha,\beta,\gamma)\equiv\kappa(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\ldots \quad (3)$$

Διὰ $\alpha=\beta=\gamma=1$ ἡ (3) δίδει $\kappa=0$, ἄρα $\phi(\alpha,\beta,\gamma)\equiv 0$ καὶ ἕπεται ἡ ζητουμένη σχέσις.

β) Θέτομεν $\alpha(\tau-\alpha)^2+\beta(\tau-\beta)^2+\gamma(\tau-\gamma)^2\equiv \mathrm{A}$ καὶ θεωροῦμεν τὸ πολυώνυμο

$$\sigma(\alpha,\beta,\gamma)\equiv \mathrm{A}-\alpha\beta\gamma \qquad (4)$$

Προφανῶς ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸ Α τὴν τιμὴν τοῦ τ ἐκ τῆς ὑποθέσεως προκύπτει ὅτι τὸ Α εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν πολυώνυμον ὡς πρὸς α,β,γ ὁπότε καὶ τὸ $\sigma(\alpha,\beta,\gamma)$ εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν ὡς πρὸς α,β,γ.

Ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ διὰ τὸ $\phi(\alpha,\beta,\gamma)$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\sigma(\alpha,\beta,\gamma)\equiv\kappa(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma).$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ταυτότητος διὰ $\alpha=\beta=\gamma=1$ εὑρίσκομεν $\kappa=-2$ καὶ συνεπῶς

$$\sigma(\alpha,\beta,\gamma)\equiv -2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως καὶ τῆς (4) προκύπτει ὅτι $\mathrm{A}-\alpha\beta\gamma\equiv -2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ καὶ ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $\mathrm{A}=0$ προκύπτει ὅτι $\alpha\beta\gamma=2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ καὶ ἐκ τῆς ἤδη ἀποδειχθείσης ταυτότητος (1) προκύπτει ὅτι $\dfrac{\alpha}{\tau-\alpha}+\dfrac{\beta}{\tau-\beta}+\dfrac{\gamma}{\tau-\gamma}=0$ καὶ ἐκ τῆς ταυτότητος τοῦ Euler προκύπτει ἡ

$$\left(\frac{\alpha}{\tau-\alpha}\right)^3+\left(\frac{\beta}{\tau-\beta}\right)^3+\left(\frac{\gamma}{\tau-\gamma}\right)^3=3\cdot\frac{\alpha}{\tau-\alpha}\cdot\frac{\beta}{\tau-\beta}\cdot\frac{\gamma}{\tau-\gamma}=3\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}=3\cdot 2=6.$$

Σημείωσις: Ἡ ὑπόθεσις $\alpha\beta\gamma\neq 0$ εἶναι προφανῶς περιττή, θὰ ἔπρεπε ἀντ' αὐτῆς νὰ δοθῇ ἡ ὑπόθεσις $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\neq 0$.

Ζήτημα 3^{ο}

1^{η} λύση (Μιχ. Λάμπρου)

Λύνουμε την $\lambda_\nu \in \mathbb{Z}$ όπου $1+\rho+\dfrac{\rho}{\lambda_\nu(1+\rho)}=0,\ (*)$, ισοδύναμα $\lambda_\nu=\dfrac{-\rho}{(1+\rho)^2}$.

Θέτοντας $\rho=\dfrac{a}{b},\ a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N}^*$ πρώτοι μεταξύ τους, έχουμε $\lambda_\nu=\dfrac{-ab}{(a+b)^2}$.
Δεν μπορεί $a>0$ γιατί $a+b$ πρώτος προς τους a,b και δεν τους διαιρεί, οπότε δεν είναι $\lambda_\nu\in\mathbb{Z}$. Επίσης, από την $(*)$ δεν μπορεί να είναι $a=0$. Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση $a<0$. Γράφουμε $c=-a>0$ οπότε έχουμε

$$\lambda_\nu=\frac{cb}{(c-b)^2}.$$

Όμως ο $c-b$ δεν έχει κοινό διαιρέτη με τους c,b οπότε $c-b=\pm1$. Άρα $\lambda_\nu=\dfrac{c(c\pm1)}{1^2}=c(c\pm1)$. Συμπεραίνουμε ότι τελικά ο λ_ν ε'ομαι της μορφής $m(m+1),\ m\in\mathbb{N}^*$. Άρα

$$\sum\frac{1}{\lambda_\nu}=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}=\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)=1 \text{ (τηλεσκοπικό).}$$

Φιλικά,

Μιχάλης

Σχόλιο: Η άσκηση είναι κακοδιατυπωμένη κατά τούτο: Οι τιμές του ρ που δίνουν ακέραιο λάμδα είναι μεν άπειρες, αλλά πρέπει να θεωρήσουμε ότι παίρνουμε το κάθε λάμδα που προκύπτει από μία φορά. Μέχρι εδώ, ουδέν μεμπτόν. Μετά όμως πρέπει να θεωρήσουμε ότι τα λάμδα λαμβάνονται με αύξουσα σειρά, $\lambda_1=1\cdot2,\ \lambda_2=2\cdot3,\ldots$ και λοιπά. Αυτό είναι ασθενές σημείο της διατύπωσης.
Υπάρχει ο αντίλογος ότι η σειρά είναι συγκλίνουσα θετικών όρων, άρα κάθε αναδιάταξή της συγκλίνει στο ίδιο όριο (εκτός ύλης Λυκείου ακόμη και το 1970).
Όμως αυτό δεν σώζει την κατάσταση γιατί η εκφώνηση όφειλε να καθορίσει την διάταξη των λ_ν. Αλλά εν έτη 1970 (οι παλιοί θυμούνται) δεν είμαι τόσο βέβαιος ότι θα μπορούσε κάποιος να διαμαρτυρηθεί για ασάφεια στα θέματα, στον βαθμό που μπορεί σήμερα.

2^{η} λύση (Παν. Βασιλειάδη)

α) Θέτομεν $\lambda_\nu=\chi$, $1+\rho+\dfrac{\rho}{\chi(1+\rho)}=0 \Longrightarrow \chi(1+\rho)^2+\rho=0 \Longrightarrow$

$$\chi\rho^2+(2\chi+1)\rho+\chi=0 \Longrightarrow \rho=\frac{-(2\chi+1)\pm\sqrt{(2\chi+1)^2-4\chi^2}}{2\chi} \Longrightarrow \rho=\frac{-(2\chi+1)\pm\sqrt{4\chi+1}}{2\chi}$$

Ἐπειδὴ $\rho\in Q \Longrightarrow 4\chi+1=\kappa^2 \Longrightarrow \kappa$ περιττός, ἤτοι $\kappa=2\mu+1$ καὶ κατὰ συνέπειαν $4\chi+1=(2\mu+1)^2 \Longrightarrow 4\chi+1=4\mu^2+4\mu+1 \Longrightarrow \chi=\mu(\mu+1)\ \ \mu\in Z$.
Λόγῳ τῆς δοθείσης σχέσεως θὰ πρέπῃ $\chi\neq0$, ἤτοι $\mu\neq0$ καὶ $\mu\neq-1$.
Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι διὰ πᾶν ζεῦγος μ_1,μ_2 διὰ τὸ ὁποῖον ἰσχύει ἡ σχέσις $\mu_1+\mu_2$ θὰ ἔχωμεν:

$$\chi_{\mu_1}=\mu_1(\mu_1+1) \quad\text{καὶ}\quad \chi_{\mu_2}=\mu_2(\mu_2+1)=(-\mu_1-1)(-\mu_1-1+1)$$

Οὕτω διὰ $\mu_1=1,2,3,\ldots,\nu$ ἔχομεν $\mu_2=-2,-3,-4,\ldots,(\nu+1)$ καὶ συνεπῶς

$$\chi_{\mu_\nu}=\chi_{\mu_{-(\nu+1)}}\ \forall\ \nu\in N$$

Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ περιορισθῶμεν εἰς $\mu\in N$.
Παρατηροῦμεν ἑπομένως πάντα τὰ χ δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\chi_\mu=\mu(\mu+1),\qquad \mu\in N$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη ἀκολουθία εἶναι ἡ $\lambda_\nu=\nu(\nu+1),\quad \nu\in N.$

β) Πρὸς ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος ἔχομεν:

$$\frac{1}{\lambda_\nu}=\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{\nu+1-\nu}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}$$

Θέτοντες διαδοχικῶς $\nu=1,2,3,\ldots$ καὶ προσθέτοντες τὰς προκυπτούσας ἰσότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν:

$$\Sigma\frac{1}{\lambda_\nu}=\frac{1}{1}-\frac{1}{\nu+1}=\frac{\nu}{\nu+1}\quad.$$

$3^η$ λύση (Αρ. Πάλλα)

Ἡ δοθεῖσα σχέσις $1+\rho+\dfrac{\rho}{\lambda_\nu(1+\rho)}=0$ (1) γράφεται $\lambda_\nu(1+\rho)^2+(1+\rho)-1=0$ καὶ λυομένη ὡς πρὸς $1+\rho$ δίδει: $1+\rho=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\lambda_\nu}}{2\lambda_\nu}$ (2).

Ἐπειδὴ $1+\rho$ ρητὸς καὶ λ_ν ἀκέραιος θὰ πρέπῃ τὸ $1+4\lambda_\nu$ νὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου k, ἤτοι θὰ πρέπῃ $1+4\lambda_\nu=k^2$, ἔνθα k ἀκέραιος. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν: $\lambda_\nu=\dfrac{k^2-1}{4}$ (3). Ἐπειδὴ λ_ν ἀκέραιος θὰ πρέπῃ καὶ ὁ $\dfrac{k^2-1}{4}$ νὰ εἶναι ἀκέραιος, ὅπερ δὲν συμβαίνει ὅταν ὁ k εἶναι τῆς μορφῆς $k=2\cdot\sigma(\nu)$, ἔνθα $\sigma(\nu)$ τυχοῦσα ἀκεραία συνάρνησις τοῦ ν. Θὰ εἶναι συνεπῶς $k=2\cdot\sigma(\nu)+1$. Τότε ἡ (3) δίδει:

$$\lambda_\nu=\sigma^2(\nu)+\sigma(\nu), \quad \text{ἢ} \quad \lambda_\nu=\sigma(\nu)[\sigma(\nu)+1] \quad (4).$$

Ἐκ τῆς (2) προκύπτει τότε:

$$\rho=-\frac{1}{\sigma(\nu)}=\text{ρητός}, \quad \text{ἢ} \quad \rho=-\frac{1+\sigma(\nu)}{\sigma(\nu)}=\text{ρητός}.$$

Ὁ νιοστὸς ὅρος λ_ν, συνεπῶς, τῆς ἀκολουθίας τῶν ἀκεραίων πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν πληρούντων τὴν (1) δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (4). Ὑπάρχουν ἑπομένως ἄπειροι νιοστοὶ ὅροι καὶ κατὰ συνέπειαν ἄπειραι τοιαῦται ἀκολουθίαι, διότι ἡ ἀκεραία συνάρτησις $\sigma(\nu)$ εἶναι τυχοῦσα. Π.χ. ἐὰν ληφθῇ ὡς $\sigma(\nu)\equiv\nu^2$, τότε ὁ νιοστὸς ὅρος εἶναι ὁ $\lambda_\nu=\nu^2(\nu^2+1)$ καὶ ἡ ἀκολουθία, προκύπτουσα διὰ $\nu=1, 2, 3, \ldots$, εἶναι ἡ

$$1\cdot2, \quad 4\cdot5, \quad 9\cdot10, \quad 16\cdot17, \quad 25\cdot26, \ldots$$

Ἡ σειρὰ $\sum\dfrac{1}{\lambda_\nu}$ εἶναι ἡ $\sum\dfrac{1}{\sigma(\nu)[\sigma(\nu)+1]}=$

$$=\frac{1}{\sigma(1)[\sigma(1)+1]}+\frac{1}{\sigma(2)[\sigma(2)+1]}+\ldots+\frac{1}{\sigma(\nu)[\sigma(\nu)+1]}+\cdots$$

καὶ δὲν γνωρίζομεν ἐὰν συγκλίνῃ ἢ ἀποκλίνει.

Παράδειγμα συγκλίσεως. Ἐὰν ληφθῇ $\sigma(\nu)=\nu$, τότε

$$\lambda_\nu=\nu(\nu+1) \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{\lambda_\nu}=\frac{1}{\nu(\nu+1)}=\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1} \quad \text{καὶ}$$

ἡ σειρὰ[1] $\sum\dfrac{1}{\lambda_\nu}=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots$

Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι:

$$\Sigma_\nu\frac{1}{\lambda_\nu}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{\nu}-\frac{1}{\nu+1}\right)=1-\frac{1}{\nu+1}$$

καὶ συνεπῶς: $\lim\limits_{\nu\to\infty}\Sigma_\nu\left(\dfrac{1}{\lambda_\nu}\right)=1$. Ἄρα ἡ σειρὰ συγκλίνει καὶ ἔχει ἄθροισμα 1.

Μία περίπτωσις γενικὴ συγκλίσεως. Ἐὰν $\sigma(\nu)>0$, $\sigma(\nu)+1<\sigma(\nu+1)$ διὰ κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ καὶ $\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{1}{\sigma(\nu)}=0$, τότε ἡ σειρὰ συγκλίνει.— Πράγματι:

Ἐπειδὴ $\dfrac{1}{\lambda_\nu}=\dfrac{1}{\sigma(\nu)[\sigma(\nu)+1]}=\dfrac{1}{\sigma(\nu)}-\dfrac{1}{\sigma(\nu)+1}$, ἔχομεν:

---

(1) Σ. Σ. — Δυστυχῶς τὸ θέμα ἐδόθη λάθος. Φαίνεται ὅτι ὁ Καθηγητὴς ὁ ὁποῖος ἔδωσε τὸ θέμα εἶχε ὑπ' ὄψιν του μόνον τὴν περίπτωσιν $k=2\nu+1$, ἡ ὁποία εἶναι μερικὴ περίπτωσις τῆς $k=2\cdot\sigma(\nu)+1$.