ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τετάρτη 2 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1ο

α) «*ἡ ἀκολουθία* α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ *πραγματικῶν ἀριθμῶν* **συγκλίνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α** ἢ ἄλλως τείνει πρὸς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν **α** καὶ θὰ συμβολίζωμεν τοῦτο μέ: $\alpha_\nu \to \alpha$ *τότε, καὶ μόνον τότε, ἂν ἡ ἀκολουθία* $(\alpha_\nu - \alpha)$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ δηλαδὴ ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha_1 - \alpha,\ \alpha_2 - \alpha,\ \alpha_3 - \alpha, \ldots, \alpha_\nu - \alpha, \ldots$$

εἶναι μηδενική.

Τὸν ἀριθμὸν α καλοῦμεν **«ὅριον»** ἢ **«ὁριακὴν τιμὴν»** τῆς ἀκολουθίας α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$ καὶ γράφομεν: $\textbf{όρ}\,\boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha}$ ἢ ἄλλως $\lim \boldsymbol{\alpha_\nu = \alpha}$.

β)

Πράγματι, ἐὰν εἰς τὸν τύπον

$$(x+\alpha)^\nu = \binom{\nu}{0}x^\nu + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^2 + \cdots + \binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^k + \cdots + \binom{\nu}{\nu-1}x\alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{\nu}\alpha^\nu$$

θέσωμεν $x = 1$. $\alpha = \frac{1}{\nu}$, τότε ἔχομεν:

$$\alpha_\nu = \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

$$= 1 + \frac{\nu}{1}\,\frac{1}{\nu} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\,\frac{1}{\nu^2} + \cdots + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\cdot\frac{1}{\nu^k} + \cdots + \frac{1}{\nu^\nu}.$$

Ὁ γενικὸς ὅρος τοῦ ἀνωτέρω ἀναπτύγματος γράφεται:

$$\frac{\nu(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdots(\nu-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots k}\cdot\frac{1}{\nu^k} = \frac{1}{k!}\cdot\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right).$$

Ὅθεν:

$$\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right) + \cdots$$
$$+ \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right) + \cdots + \frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right)$$

καὶ

$$\alpha_{\nu+1} = \left(1+\frac{1}{\nu+1}\right)^{\nu+1} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu+1}\right) +$$
$$\cdots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu+1}\right) + \cdots + \frac{1}{(\nu+1)!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\left(1-\frac{2}{\nu+1}\right)\cdots$$
$$\left(1-\frac{\nu}{\nu+1}\right),$$

ὅπου οἱ ὅροι εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $\alpha_{\nu+1}$ εἶναι κατὰ μονάδα περισσότεροι ἐκείνων τοῦ α_ν.

Ἂν συγκρίνωμεν εἰς τὰ ἀναπτύγματα τῶν α_ν , $\alpha_{\nu+1}$ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς τοὺς δύο πρώτους ὅρους, ἔπειτα τοὺς δύο δευτέρους κ.ο.κ. βλέπομεν, ὅτι διὰ $2 \leqq k \leqq \nu$ οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου εἶναι μεγαλύτεροι, διότι :

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu}\right) < \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{\nu+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{\nu+1}\right).$$

Ἐξ ἄλλου ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $\alpha_{\nu+1}$, ὁ ὁποῖος δὲν ἔχει ἀντίστοιχον εἰς τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ α_ν, δηλ. ὁ $\frac{1}{(\nu+1)^{\nu+1}}$ εἶναι > 0 .

Ὥστε εἶναι :

$$\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1} \quad \text{διὰ} \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

ἤτοι : ἡ ἀκολουθία α_ν , $\nu = 1, 2, \ldots$ εἶναι γνησίως αὔξουσα.

Αὔτη εἶναι καὶ φραγμένη. Ἓν ἄνω φράγμα διὰ τὴν ἀκολουθίαν α_ν , $\nu = 1,2 \ldots$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, διότι :

$$\alpha_\nu = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right) + \cdots + \frac{1}{\nu!}\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\left(1-\frac{2}{\nu}\right)\cdots\left(1-\frac{\nu-1}{\nu}\right) \leqq 1 + $$
$$+ \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{\nu!}.$$

Ἰσχύει ὅμως :

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots k} < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 2^{k-2}} = \frac{1}{2^{k-1}} \quad \text{διὰ} \quad k = 3,4,\ldots$$

ὅθεν :

$$\alpha_\nu \leqq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{\nu!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{\nu-1}}\right) =$$
$$= 1 + \frac{1-2^{-\nu}}{1-\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Bernoulli ἔχομεν :

$$\alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu \geqq 1 + \nu\cdot\frac{1}{\nu} = 1 + 1 = 2 \quad \forall \quad \nu = 1,2,\ldots$$

Ἤτοι τελικῶς :

$$2 < \alpha_\nu = \left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu < 3$$

(διότι τὸ 2 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς αὐξούσης ἀκολουθίας α_ν , ἤτοι $\alpha_1 = 2$).

Ἡ α_ν , $\nu = 1,2,\ldots$ εἶναι ὅθεν γνησίως αὔξουσα καὶ φραγμένη ἀκολουθία, συνεπῶς συγκλίνει. Καλοῦμεν :

$$e \underset{\text{ορσ}}{=} \lim \alpha_\nu \equiv \lim\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu.$$

Ζήτημα 2ο

1η λύση

Αν α_1, β_1 είναι οι πρώτοι όροι και ω_1, ω_2 οι λόγοι (διαφορές) δύο αριθμητικών προόδων α_ν, β_ν έχουμε :

$$\Sigma_\nu = \frac{1}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega_1\right],\ \Sigma_\nu' = \frac{1}{2}\left[2\beta_1 + (\nu - 1)\cdot\omega_2\right] \quad \text{και} \quad \frac{\Sigma_\nu}{\Sigma_\nu'} = \frac{7\nu + 2}{\nu + 1} \quad \textbf{(1)}$$

$$\frac{\alpha_5}{\beta_5} = \frac{\alpha_1 + 4\cdot\omega_1}{\beta_1 + 4\cdot\omega_2} = \frac{\frac{1}{2}\left(2\alpha_1 + 8\cdot\omega_1\right)}{\frac{1}{2}\left(2\beta_1 + 8\cdot\omega_2\right)} = \frac{\Sigma_9}{\Sigma_9'} \underset{\nu=9}{\overset{(1)}{=}} \frac{7\cdot 9 + 2}{9 + 1} = \frac{65}{10} = \mathbf{\frac{13}{2}}$$

2η λύση (Αρ. Πάλλας)

Ἔστωσαν α, β οἱ πρῶτοι ὅροι τῶν δύο προόδων, ω καὶ λ οἱ λόγοι αὐτῶν καὶ Σ_ν, Σ_ν' τὰ ἀθροίσματα τῶν ν πρώτων ὅρων των. Ὡς γνωστὸν εἶναι:

$$\Sigma_\nu = \frac{[2\alpha+(\nu-1)\omega]^{\nu}}{2}, \quad \Sigma_\nu' = \frac{[2\beta+(\nu-1)\lambda]^{\nu}}{2} \qquad (1).$$

Κατὰ τὸ ἐπίταγμα ἔχομεν $\dfrac{\Sigma_\nu}{\Sigma_\nu'} \equiv \dfrac{7\nu+2}{\nu+1}$ διὰ κάθε φυσικὸν ἀριθμὸν ν. Αὕτη, λόγῳ τῶν (1), γίνεται: $\dfrac{2\alpha+(\nu-1)\omega}{2\beta+(\nu-1)\lambda} \equiv \dfrac{7\nu+2}{\nu+1}$. Αὕτη γράφεται:

$$\omega\nu^2+2\alpha\nu+(2\alpha-\omega) \equiv 7\lambda\nu^2+(14\beta-5\lambda)\nu+(4\beta-2\lambda).$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\omega=7\lambda, \quad 2\alpha=14\beta-5\lambda, \quad 2\alpha-\omega=4\beta-2\lambda.$$

Λυόμενον τοῦτο ὡς πρὸς α, β, ω δίδει: $\alpha=\dfrac{9\lambda}{2}$, $\beta=\lambda$, $\omega=7\lambda$.

Οἱ πέμπτοι ὅροι τ_5 καὶ τ_5' τῶν προόδων αὐτῶν εἶναι:

$\tau_5=\alpha+4\omega=\dfrac{9\lambda}{2}+28\lambda=\dfrac{65\lambda}{2}$, $\tau_5'=\beta+4\lambda=\lambda+4\lambda=5\lambda$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν:

$\dfrac{\tau_5}{\tau_5'}=\dfrac{65\lambda}{10\lambda}=\dfrac{13}{2}$. Ἄρα ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι $\dfrac{13}{2}$.

Ζήτημα 3ο

1η λύση

α) $(x, y)\in A\times B \Rightarrow$

$(x\in A$ και $y\in B) \overset{A\subseteq X}{\underset{B\subseteq \Psi}{\Rightarrow}}$

$(x\in X$ και $y\in \Psi) \Rightarrow$

$(x, y)\in X\times\Psi$

Επομένως $A\times B\subseteq X\times\Psi$

β) $(x, y)\in (X\times\Psi) - (A\times B) \Leftrightarrow$

$(x, y)\in (X\times\Psi)$ και $(x, y)\notin (A\times B) \Leftrightarrow$

$(x\in X$ και $y\in\Psi)$ και $(x\notin A$ ή $y\notin B) \Leftrightarrow$

$(x\in X$ και $y\in\Psi$ και $x\notin A)$ ή $(x\in X$ και $y\in\Psi$ και $y\notin B) \Leftrightarrow$

$[x\in (X - A)$ και $y\in\Psi]$ ή $[x\in X$ και $y\in(\Psi - B)] \Leftrightarrow$

$(x, y)\in[(X - A)\times\Psi]$ ή $(x, y)\in[X\times(\Psi - B)] \Leftrightarrow$

$(x, y)\in\{[(X - A)\times\Psi]\cup[X\times(\Psi - B)]\}$

Επομένως $(X\times\Psi) - (A\times B) = [(X - A)\times\Psi]\cup[X\times(\Psi - B)]$

$2^{η}$ λύση (Αρ. Πάλλα)

α) Ἔστω α τυχὸν στοιχεῖον τοῦ A καὶ β τυχὸν στοιχεῖον τοῦ B.

Ἐπειδὴ $α \in A$ καὶ $β \in B$, θὰ ἔχωμεν καὶ $α \in X$, $β \in Ψ$. Τὸ α, β εἶναι συνεπῶς στοιχεῖον καὶ τοῦ $A \times B$ καὶ τοῦ $X \times Ψ$. Ἄρα τὸ τυχὸν στοιχεῖον τοῦ $A \times B$ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ $X \times Ψ$. Δὲν συμβαίνει ὅμως ἐν γένει καὶ τὸ ἀντίστροφον. Πράγματι: Ἔστω ἓν στοιχεῖον x_1 τοῦ X μὴ ἀνῆκον εἰς τὸ A καὶ y_1 τυχὸν στοιχεῖον τοῦ Ψ. Τὸ (x_1, y_1) εἶναι στοιχεῖον τοῦ $X \times Ψ$ δὲν εἶναι ὅμως στοιχεῖον τοῦ $A \times B$. Οὕτως ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον $A \times B$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου $X \times Ψ$.

β) Ἔστω ὅτι $x_1 \in X$, $y_1 \in Ψ$. Τότε $(x_1, y_1) \in (X \times Ψ)$.

Διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις:

Περίπτωσις I. $x_1 \in A$, $y_1 \in B$. Τότε $(x_1, y_1) \in (A \times B)$ καὶ συνεπῶς

$$(x_1, y_1) \notin \big((X \times Ψ) - (A \times B)\big),$$

ἤτοι τὸ (x_1, y_1) δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ πρώτου μέλους τῆς ἰσότητος (α). Ἔχομεν ἐπίσης:

$$x_1 \notin (X - A), \quad \text{ὅτε} \quad (x_1, y_1) \notin \big((X - A) \times Ψ\big),$$

$$y_1 \in (Ψ - B), \quad \text{ὅτε} \quad (x_1, y_1) \notin \big(X \times (Ψ - B)\big).$$

Ἀλλὰ τότε τὸ (x_1, y_1) δὲν ἀνήκει εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν $\big((X-A) \times Ψ\big)$ καὶ $\big(X \times (Ψ-B)\big)$, ἤτοι εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (α). Ἄρα τὸ ζεῦγος (x_1, y_1) δὲν εἶναι στοιχεῖον οὔτε τοῦ πρώτου οὔτε τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (α).

Περίπτωσις II. $x_1 \not\subset A$, $y_1 \notin B$. Τότε $(x_1, y_1) \notin (A \times B)$ καὶ συνεπῶς $(x_1, y_1) \in \big((X \times Ψ) - (A \times B)\big)$. Ἐπίσης ἔχομεν: $x_1 \in (X - A)$, $y_1 \in (Ψ - B)$

καὶ κατὰ συνέπειαν $(x_1, y_1) \in \big((X - A) \times Ψ\big)$, $(x_1, y_1) \in \big(X \times (Ψ - B)\big)$.

Ἀλλὰ τότε τὸ $(x_1 y_1)$ ἀνήκει εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν: $\big((X-A) \times Ψ\big)$ καὶ $\big(X \times (Ψ - B)\big)$, ἤτοι εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς (α). Ἄρα τὸ ζεῦγος (x_1, y_1) εἶναι στοιχεῖον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (α).

Περίπτωσις III. $x_1 \notin A$, y_1 **τυχὸν στοιχεῖον τοῦ Ψ.** Τότε $(x_1, y_1) \notin (A \times B)$ καὶ συνεπῶς $(x_1 y) \in \big(X \times Ψ) - (A \times B)\big)$. Ἐπίσης ἔχομεν:

$x_1 \in (X - A)$, ὅτε $(x_1, y_1) \in \big((X - A) \times Ψ)\big)$. Ἀλλὰ τότε τὸ (x_1, y_1) εἶναι στοιχεῖον τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (α). Ἄρα τὸ ζεῦγος (x_1, y_1) εἶναι στοιχεῖον ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (α).

Ὁμοίως ἐξετάζεται ἡ περίπτωσις: x_1 τυχὸν στοιχεῖον τοῦ X καὶ $y_1 \notin B$.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἀντίστροφα.

Οὕτως ἐδείχθη ὅτι πᾶν στοιχεῖον (x_1, y_1) τοῦ πρώτου μέλους τῆς (α) εἶναι καὶ τοῦ δευτέρου μέλους καὶ ἀντιστρόφως.