ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Πέμπτη 10 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1ο

Γεωμετρικὴ πρόοδος *εἶναι μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον* $\alpha_{\nu+1}:\alpha_\nu$ *δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της ἰσοῦται μὲ τὸν αὐτὸν πάντοτε ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος καλεῖται* **λόγος** *τῆς γεωμετρικῆς προόδου.*

$$\boxed{\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\omega, \quad \nu=1,2,\dots}$$

Ἐὰν $|\omega|<1$, τότε $|\alpha_{\nu+1}|<|\alpha_\nu|$ διὰ κάθε $\nu=1,2,\dots$, δηλ. ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος α_ν, $\nu=1,2,\dots$ εἶναι **ἀπολύτως φθίνουσα.**

$\Sigma_\nu=\alpha+\alpha\omega+\dots+\alpha\omega^{\nu-1}$

ἢ $\displaystyle \Sigma_\nu=\frac{\alpha\omega^\nu-\alpha}{\omega-1}$ ἢ $\displaystyle \Sigma_\nu=\frac{\alpha}{1-\omega}-\frac{\alpha}{1-\omega}\omega^\nu$

Ἡ ἀκολουθία ὅμως ω^ν, $\nu=1,2,\dots$ μὲ $|\omega|<1$ εἶναι μηδενική

Ὅθεν : $\displaystyle \lim_{\nu\to\infty}\Sigma_\nu=\frac{\alpha}{1-\omega}$, διότι $\displaystyle \lim_{\nu\to\infty}\frac{\alpha}{1-\omega}\cdot\omega^\nu=0.$

Ὥστε : $$\boxed{\text{Ἐὰν } |\omega|<1 \Longrightarrow \Sigma_\infty\equiv\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}}$$

Ζήτημα 2ο

Από τύπους Vieta έχουμε : $S=\rho_1+\rho_2=\dfrac{2(\mu-1)}{\mu}$ και $P=\rho_1\cdot\rho_2=\dfrac{\mu}{\mu}=1$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}+\frac{\rho_2}{\rho_1}=4 \Leftrightarrow \rho_1^2+\rho_2^2=4\rho_1\cdot\rho_2 \Leftrightarrow \rho_1^2+2\rho_1\cdot\rho_2+\rho_2^2=6\rho_1\cdot\rho_2 \Leftrightarrow$$

$$(\rho_1+\rho_2)^2=6\rho_1\cdot\rho_2 \Leftrightarrow S^2=6P \Leftrightarrow \left[\frac{2(\mu-1)}{\mu}\right]^2=6\cdot1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4(\mu-1)^2}{\mu^2}=6 \Leftrightarrow 4(\mu-1)^2=6\mu^2 \Leftrightarrow 4\mu^2-8\mu+4=6\mu^2 \Leftrightarrow$$

$$2\mu^2+8\mu-4=0 \Leftrightarrow \mu^2+4\mu-2=0$$

$$\Delta'=4^2-4\cdot1\cdot(-2)=16+8=24$$

$$\mu=\frac{-4\pm\sqrt{24}}{2}=\frac{-4\pm2\sqrt6}{2}=\frac{2(-2\pm\sqrt6)}{2}=\mathbf{-2\pm\sqrt6}$$

Σημείωση: Δεν είναι υποχρεωτικό να είναι $\Delta\geq0$. Οι ρίζες ρ_1, ρ_2 μπορεί να είναι μιγαδικοί αριθμοί.

Ζήτημα 3^{o}

Έστω $\overline{xy}$ ο ζητούμενος αριθμός, x,y φυσικοί αριθμοί.

Πρέπει $\left|\dfrac{\overline{xy}}{x+y} - \dfrac{\overline{yx}}{x+y}\right| = |x-y| \Leftrightarrow \left|\dfrac{10x+y}{x+y} - \dfrac{10y+x}{x+y}\right| = |x-y| \quad (1)$

και $\dfrac{\overline{xy}}{x+y}\cdot\dfrac{\overline{yx}}{x+y} = \overline{xy} \Leftrightarrow \dfrac{10x+y}{x+y}\cdot\dfrac{10y+x}{x+y} = 10x+y$ (2).

1^{η} λύση

$(2) \overset{10x+y\neq 0}{\Leftrightarrow} \dfrac{10y+x}{(x+y)^2} = 1 \Leftrightarrow 10y+x = (x+y)^2 \Leftrightarrow \overline{yx} = (x+y)^2$

Άρα $\overline{yx} = 16$ ή 25 ή 36 ή 49 ή 64 ή 81

Από αυτούς μόνο αν $\overline{yx} = 81$ επαληθεύονται οι συνθήκες (1) και (2).

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός αριθμός είναι το $\boxed{18}$.

2^{η} λύση

$(1) \Leftrightarrow \left|\dfrac{9x-9y}{x+y}\right| = |x-y| \Leftrightarrow \dfrac{9|x-y|}{x+y} = |x-y| \Leftrightarrow$

$9|x-y| = |x-y|\cdot(x+y) \Leftrightarrow |x-y|\cdot(x+y) - 9|x-y| = 0 \Leftrightarrow$

$|x-y|\cdot(x+y-9) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0$ ή $x+y-9=0 \Leftrightarrow$

$x = y$ ή $y = 9-x$

• Αν $x=y$, τότε $(2) \Rightarrow \dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{11}{2} = 11x \Leftrightarrow x = \dfrac{11}{4}$ (ΑΤΟΠΟ)

• Επομένως $y = 9-x$ (3)

$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} \dfrac{9x+9}{9}\cdot\dfrac{90-9x}{9} = 9x+9 \Leftrightarrow (x+1)(10-x) = 9(x+1) \overset{x+1\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$10-x = 9 \Leftrightarrow \mathbf{x=1} \overset{(3)}{\Rightarrow} \mathbf{y=8}$

Άρα ο ζητούμενος αριθμός αριθμός είναι το $\boxed{18}$.