ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Τρίτη 8 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1ο

α)

Ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων διαδοχικῶς εἰς τὴν νυοστὴν δύναμιν.

Ἔχομεν : 1) $\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}\cdot\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}=\alpha\cdot\beta$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha\beta}\right)^{\nu}=\alpha\beta$, ἄρα κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$

2) $\left(\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu}=\dfrac{\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu}}{\left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\left(\sqrt[\nu]{\alpha:\beta}\right)^{\nu}=\alpha:\beta=\dfrac{\alpha}{\beta}$

ἄρα κατὰ τὴν βοηθητικὴν πρότασιν ἔχομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}:\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$

β)

1) Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ $\varphi(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΕΙΣ ΤΟ R.

Ἔστω $x_0\in R$ μία τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x καὶ $\varphi(x_0)=\alpha x_0{}^2+\beta x_0+\gamma$ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως. Ἐὰν λάβωμεν καὶ τὴν τιμὴν $x_0+\varepsilon$, ὅπου $\varepsilon>0$ καὶ ὅσον θέλομεν μικρὰ ποσότης, τότε ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι $\varphi(x_0+\varepsilon)=\alpha(x_0+\varepsilon)^2+\beta(x_0+\varepsilon)+\gamma$. Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $\varphi(x_0+\varepsilon)-\varphi(x_0)=\alpha(x_0+\varepsilon)^2+\beta(x_0+\varepsilon)+\gamma-(\alpha x_0{}^2+\beta x_0+\gamma)=$ $=2\alpha x_0\,\varepsilon+\alpha\varepsilon^2+\beta\varepsilon$.

Ἐπειδὴ ε ἀριθμὸς ὁσονδήποτε μικρός, κάθε ὅρος τοῦ βου μέλους ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν ὅσον θέλομεν μικρὰν καὶ συνεπῶς ἡ διαφορὰ $\varphi(x_0+\varepsilon)-\varphi(x_0)$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ $\varepsilon'>0$, ὁσονδήποτε μικροῦ κατὰ βούλησιν. Ἄρα $\varphi(x_0+\varepsilon)\to\varphi(x_0)$. Ἐπειδὴ δέ, $x_0+\varepsilon\to x_0$, διότι $\varepsilon>0$ ὁσονδήποτε μικρός, ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi=\varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $x=x_0$. Ἡ τιμὴ ὅμως x_0 εἶναι τυχοῦσα καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\psi=\varphi(x)$ εἶναι συνεχὴς διὰ κάθε τιμὴν $x\in R$ καὶ ἄρα συνεχὴς εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R.

2) Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma$, ὅταν $x\in R$

Ἔστω $x_1, x_2\in R$ $(x_1<x_2)$ δύο τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x καὶ $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως. Σχηματίζομεν τὸν λόγον $\dfrac{\varphi(x_1)-\varphi(x_2)}{x_1-x_2}=$

$$=\frac{\alpha x_1{}^2+\beta x_1+\gamma-\alpha x_2{}^2-\beta x_2-\gamma}{x_1-x_2}=\frac{\alpha(x_1{}^2-x_2{}^2)+\beta(x_1-x_2)}{x_1-x_2}=\alpha(x_1+x_2)+\beta=$$

$$=\alpha\left(x_1+x_2+\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Διὰ τὸν ἔλεγχον τοῦ σημείου αὐτοῦ διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

α) Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ λάβομεν $x_1 < x_2 \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$, τότε ἔχομεν $x_1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ $x_2 \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow$ $\Rightarrow x_1 + x_2 < -\frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha} < 0 \Rightarrow \alpha\left(x_1 + x_2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) < 0 \Rightarrow \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} <$ < 0 καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι **φθίνουσα.**

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἂν $\alpha > 0$ καὶ $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x_1 < x_2$, τότε ἡ $\varphi(x)$ εἶναι **αὔξουσα.**

Ὥστε, ἡ συνάρτησις διὰ $\alpha > 0$ εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι φθίνουσα καὶ εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x < +\infty$ αὔξουσα. Δηλαδὴ ἀλλάσσει φορὰν μεταβολῆς καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ φθίνουσα γίνεται αὔξουσα, διέρχεται διὰ μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς καλουμένης **ἐλάχιστον (minimum) τῆς συναρτήσεως.**

β) **Ἐὰν $\alpha < 0$, ἀποδεικνύομεν ὡς προηγουμένως, ὅτι ἡ συνάρτησις εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x \leqslant -\frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι αὔξουσα καὶ εἰς τὸ διάστημα $-\frac{\beta}{2\alpha} \leqslant x < +\infty$ φθίνουσα.** Ἤτοι πάλιν ἀλλάσσει φορὰν μεταβολῆς καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ αὔξουσα γίνεται φθίνουσα, διέρχεται διὰ μιᾶς μεγίστης τιμῆς, **καλουμένης μέγιστον (maximum) τῆς $\varphi(x)$.**

3) Μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι τὸ τριώνυμον, ἂν $\alpha > 0$, εἰς τὸ σύνολον ὁρισμοῦ του (R) λαμβάνει τιμὰς διερχομένας δι' ἑνὸς ἐλαχίστου, τὸ ὁποῖον εἶναι : $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἂν $\alpha < 0$, εἰς τὸ σύνολον R λαμβάνει τιμὰς διερχομένας δι' ἑνὸς μεγίστου, τὸ ὁποῖον εἶναι: $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$.

Τὴν ἐξέτασιν τῆς μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δυνάμεθα νὰ κάμωμεν καὶ ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right]$. Οὕτω διακρίνομεν τὰ ἑξῆς :

α) Ἐὰν $\alpha > 0$, τότε ὅταν $x \to \pm\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \to +\infty$ καὶ τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \to +\infty$. Ἄρα $\varphi(x) \to +\infty$ διὰ $x \to \pm\infty$. Ἐν συνεχείᾳ, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ λαμβάνει τιμὰς θετικὰς μὲν ἀλλὰ ἐλαττουμένας συνεχῶς, διὰ x δὲ ἴσον πρὸς $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0$ καὶ συνεπῶς $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left[0 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}\right] = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Ἀκολούθως, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως τοῦ $+\infty$, τὸ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 τεῖνον εἰς τὸ $+\infty$ καὶ ἡ τιμὴ τῆς $\varphi(x)$ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\varphi\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τείνουσα εἰς τὸ $+\infty$.

β) Ἐὰν $\alpha < 0$, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως τοῦ $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καί, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως τοῦ $+\infty$, ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ τείνουσα εἰς τὸ $-\infty$.

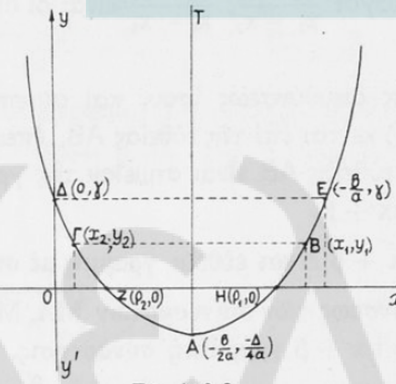
Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

Πίναξ μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

	x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha > 0$	$\varphi(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$(4\alpha\gamma-\beta^2)/4\alpha$ ἐλάχιστον	$\nearrow$	$+\infty$
$\alpha < 0$	$\varphi(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(4\alpha\gamma-\beta^2)/4\alpha$ μέγιστον	$\searrow$	$-\infty$

Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτ. $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τὸν πίνακα μεταβολῆς τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) \equiv \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ἀναφερόμενοι εἰς τὸ ὀρθογώνιον σύστημα ἀξόνων x'0x, ψ'0ψ. Οὕτω διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :



Σχ. 110.3

α) Ἐὰν $\alpha > 0$. Ἡ συνάρτησις διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην της τιμὴν $\psi = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha} = \frac{-\Delta}{4\alpha}$, ὅταν δὲ $-\infty < x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἔχει πεδίον τιμῶν τὸ $\left(+\infty, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$ καὶ ὅταν $-\frac{\beta}{2\alpha} < x < +\infty$ ἔχει πεδίον τιμῶν τὸ $\left(\frac{-\Delta}{4\alpha}, +\infty\right)$.

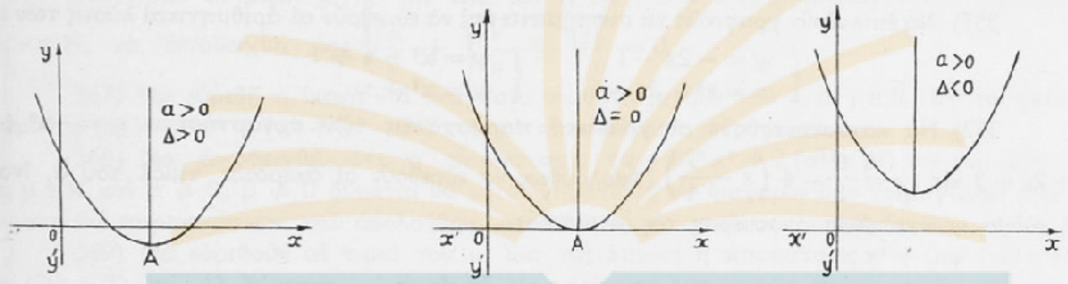
Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὸ σημεῖον Α $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha}\right)$. Ἀκολούθως λαμβάνομεν δύο τιμὰς $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} + \xi$ καὶ $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} - \xi$ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὴν τιμὴν $-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς ψ_1 καὶ ψ_2 τῆς συναρτήσεως. Εὐκόλως ἀποδεικνύομεν ὅτι $\psi_1 = \psi_2$. Ἄρα τὰ σημεῖα $B(x_1, \psi_1)$ καὶ $\Gamma(x_2, \psi_2)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΤ, ἥτις καλεῖται ἄξων συμμετρίας τῆς γραμμῆς $\psi = \varphi(x)$, καὶ συνεπῶς ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρ. $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο τμήματα ΔΓΖΑ καὶ ΑΗΒΕ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας ΑΤ. Διὰ τὴν κατασκευὴν λοιπὸν κατὰ προσέγγισιν τῆς γραμμῆς $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δέον νὰ εὕρωμεν ὅσον τὸ δυνατὸν περισσότερα σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας, διότι εἶναι ἡ γραμμὴ καμπύλη καὶ οὐδὲν τμῆμα αὐτῆς εἶναι εὐθύγραμμον. Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ ὅτι, ἡ εὐθεῖα $\psi = Ax + B$ τέμνει τὴν γραμμὴν $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἰς δύο τὸ πολὺ σημεῖα, διότι τὸ σύστημα ποὺ ἀποτελοῦν ἔχει τὸ πολὺ δύο λύσεις.

Τὴν καμπύλην ταύτην καλοῦμεν **παραβολήν**, τὸ σημεῖον Α **κορυφὴν** αὐτῆς καὶ τὸν ἄξονα ΑΤ **ἄξονα τῆς παραβολῆς.**

Παρατηρήσεις 1) Τὰ χαρακτηριστικώτερα σημεῖα τῆς καμπύλης $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι : ἡ κορυφὴ αὐτῆς $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$, τὰ σημεῖα τομῆς τῆς παραβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν x $Z(\rho_2, 0)$ καὶ $H(\rho_1, 0)$, ὅπου ρ_1, ρ_2 ρίζαι τοῦ τριωνύμου, καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς παραβολῆς μὲ τὸν ἄξονα τῶν ψ $\Delta(0, \gamma)$ καὶ τὸ συμμετρικὸν αὐτοῦ $E\left(-\frac{\beta}{\alpha}, \gamma\right)$. 2) Τὸ σημεῖον $A\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ κεῖται, ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἄξονα $x'0x$, κάτωθεν, ἢ ἐπί, ἢ ἄνωθεν αὐτοῦ, καθ' ὅσον εἶναι $\Delta > 0$, ἢ $\Delta = 0$, ἢ $\Delta < 0$. Πράγματι, διότι τότε ἀντιστοίχως θὰ εἶναι :

$$\psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} < 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0, \quad \psi = -\frac{\Delta}{4\alpha} > 0$$

Τοῦτο δεικνύεται εἰς τὰ ἀκόλουθα σχήματα.



Σχ. 110.4

β) Ἐὰν α<0. Τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν σκεπτόμενοι ὁμοίως.

Ζήτημα 2ο

α) Αφού η εξίσωση είναι δευτεροβάθμια θα πρέπει $5\lambda + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -\frac{3}{5}$ (1)

Για να έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες πρέπει :

$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (4\lambda)^2 - 4\cdot(5\lambda + 3)\cdot 4 \geq 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 - 80\lambda - 48 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 5\lambda - 3 \geq 0$

Το τριώνυμο έχει ρίζες $\frac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$, άρα $\lambda \leq \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$ ή $\lambda \geq \frac{5 + \sqrt{37}}{2}$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε $\lambda \in \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right) \cup \left(-\frac{3}{5}, \frac{5 - \sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{5 + \sqrt{37}}{2}, +\infty\right)$

β) $$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1\rho_2} + \frac{\rho_1}{\rho_1\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2} \overset{\text{Vieta}}{=} \frac{\frac{-4\lambda}{\cancel{5\lambda + 3}}}{\frac{4}{\cancel{5\lambda + 3}}} = \frac{-4\lambda}{4} = -\lambda$$

Ζήτημα 3ο

Αν α είναι ο πρώτος όρος και ω ο λόγος της γ. προόδου,

από τον τύπο $\Sigma_\infty = \Sigma = \dfrac{\alpha}{1 - \omega}$ έχουμε :

$$\Sigma_1 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\Sigma_2 = \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$$\Sigma_3 = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

...

$$\Sigma_\nu = \frac{\nu}{1 - \frac{1}{\nu + 1}} = \frac{\nu}{\frac{\nu}{\nu + 1}} = \nu + 1$$

άρα $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \dots \Sigma_\nu = 2 + 3 + 4 + \dots + (\nu + 1)$

$$= \frac{2 + (\nu + 1)}{2} \cdot \nu$$

$$= \frac{\boldsymbol{\nu + 3}}{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{\nu} \quad \text{ή} \quad \frac{\boldsymbol{\nu \cdot (\nu + 3)}}{\boldsymbol{2}}$$