ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Πέμπτη 10 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1ο

Ἀποδεικνύεται γενικώτερον, ὅτι ἡ συνάρτησις ημ ἐντὸς τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa = \left[\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa\pi + \frac{\pi}{2}\right]$ $(\kappa \in Z)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος [1]. Πράγματι: Ἔστωσαν $\chi_1, \chi_2 \in \Delta_\kappa$, $\chi_i \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $(\kappa \in Z,\ i = 1, 2)$, $\chi_i \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, $(\kappa \in Z,\ i = 1,2)$ καὶ $\chi_1 \neq \chi_2$. Ὑποθέτομεν $\eta\mu\chi_1 = \eta\mu\chi_2$, ὁπότε $\chi_1 = 2\rho\pi + \chi_2$ $(\rho \in Z)$ ἢ $\chi_1 = (2\rho+1)\pi - \chi_2$ $(\rho \in Z)$ καὶ συνεπῶς ἔχομεν:

$$\chi_1 - \chi_2 = 2\rho\pi \qquad (1)$$

$$\chi_1 + \chi_2 = 2\rho\pi + \pi \qquad (2)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_1 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ καὶ $\kappa\pi - \frac{\pi}{2} < \chi_2 < \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$,

ὁπότε: $\quad -\pi < \chi_1 - \chi_2 < \pi \qquad (3)$

$$2\kappa\pi - \pi < \chi_1 + \chi_2 < 2\kappa\pi + \pi \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (3) λαμβάνομεν: $-\pi < 2\rho\pi < \pi \Rightarrow -\frac{1}{2} < \rho < \frac{1}{2} \Rightarrow \rho = 0 \Rightarrow \chi_1 = \chi_2$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διότι ὑπετέθη $\chi_1 \neq \chi_2$. Ἐκ τῶν (2) καὶ (4) προκύπτει:

$2\kappa\pi - \pi < 2\rho\pi + \pi < 2\kappa\pi + \pi \Rightarrow 2\kappa - 1 < 2\rho + 1 < 2\kappa + 1 \Rightarrow \kappa - 1 < \rho < \kappa$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὅτι $\eta\mu\chi_1 \neq \eta\mu\chi_2$ καὶ συνεπῶς ἡ συνάρτησις ημ, ἐντὸς τοῦ διαστήματος $\Delta_\kappa \subset R$, εἶναι ἀμφιμανοσήμαντος διὰ κάθε $\kappa \in Z$. Ἄρα, τῆς συναρτήσεως ημ περιοριζομένης εἰς τὸ διάστημα Δ_κ, ὑπάρχει ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις, ἡ ὁποία συμβολίζεται μὲ **τοξ$_\kappa$ ημ** καὶ καλεῖται **ἀντίστροφος κυκλικὴ συνάρτησις** τῆς συναρτήσεως ημ. Εἰδικώτερον, ἐὰν $\kappa = 0$, τότε ἔχομεν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν:

$$\tau o\xi_0 \eta\mu : \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, +1],$$

διότι $\Delta_0 = \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. Τὴν συνάρτησιν τοξ$_0$ημ θὰ παριστῶμεν ἐφ' ἑξῆς μὲ **Τοξ ημ** (τόξον ἡμιτόνου), τὴν δὲ τιμὴν Τοξ ημχ αὐτῆς εἰς τὸ τυχὸν σημεῖον $\chi \in [-1, +1]$, θὰ καλοῦμεν **πρωτεύουσαν τιμήν.** Π.χ. τὸ Τοξ ημ $\frac{1}{2}$ παριστᾶ τὸ μοναδικὸν τόξον τοῦ διαστήματος $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, τοῦ ὁποίου τὸ ἡμίτονον εἶναι $\frac{1}{2}$, δηλαδὴ τὸ $\frac{\pi}{6}$ (Τοξ ημ $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$).

---

[1] Ἐκ τῶν μαθημάτων τῆς Ἀναλύσεως γνωρίζομεν ὅτι μία ἀπεικόνισις $f : A \longrightarrow B$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν:

$$\forall \chi_1 \in A \text{ καὶ } \forall \chi_2 \in A \text{ μὲ } \chi_1 \neq \chi_2 \Rightarrow f(\chi_1) \neq f(\chi_2).$$

Ζήτημα 2ο

1η λύση

$$A + B + \Gamma = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - \Gamma \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Gamma}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} - \eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2} + \eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2} + \eta\mu\frac{\Gamma}{2}\right)^2 = \left(\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = \left(1 - \eta\mu^2\frac{A}{2}\right)\cdot\left(1 - \eta\mu^2\frac{B}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2}} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 - \eta\mu^2\frac{B}{2} - \eta\mu^2\frac{A}{2} + \cancel{\eta\mu^2\frac{A}{2}\cdot\eta\mu^2\frac{B}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1$$

2η λύση (Αρ. Πάλλα)

$$\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu A}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu B}{2} + \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\Gamma}{2} + 2\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$1 - \sigma\upsilon\nu A + 1 - \sigma\upsilon\nu B + 1 - \sigma\upsilon\nu\Gamma + 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma - 1 = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma - \sigma\upsilon\nu(A + B + \Gamma) = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A + B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A - B}{2} + 2\sigma\upsilon\nu\frac{A + B + 2\Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A + B}{2} = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A + B}{2}\cdot\left(\sigma\upsilon\nu\frac{A - B}{2} + \sigma\upsilon\nu\frac{A + B + 2\Gamma}{2}\right) = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A + B}{2}\cdot 2\sigma\upsilon\nu\frac{2A + 2\Gamma}{4}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{2B + 2\Gamma}{4} = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \Leftrightarrow$$

$$4\sigma\upsilon\nu\frac{A + B}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{A + \Gamma}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{B + \Gamma}{2} = 4\eta\mu\frac{A}{2}\cdot\eta\mu\frac{B}{2}\cdot\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$ που ισχύει

Ζήτημα 3ο

ημ$\{$τοξσφ[συν(τοξεφx)]$\}$ > x (1)

Θέτω τοξεφx = α και τοξσφ[συν(τοξεφx)] = τοξσφ(συνα) = β.

Είναι εφα = x, σφβ = συνα και $συν^2α = \dfrac{1}{1+εφ^2α} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$$ημ^2β = \frac{1}{1+σφ^2β} = \frac{1}{1+συν^2α} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{\dfrac{2+x^2}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{2+x^2}$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f_1(x)$ = τοξεφx είναι της μορφής

$$A_{11} = \left(2κπ - \frac{π}{2}, 2κπ + \frac{π}{2}\right) \text{ ή } A_{12} = \left(2κπ + \frac{π}{2}, 2κπ + \frac{3π}{2}\right), κ \in Z.$$

Επίσης το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f_2(x)$ = τοξσφx είναι της μορφής

$A_{21} = (2κπ, 2κπ + π)$ ή $A_{22} = (2κπ - π, 2κπ)$, $κ \in Z$.

Η ανίσωση (1) γίνεται ημβ > εφα (2) και διακρίνουμε περιπτώσεις :

- Αν x > 1 η ανίσωση (2) είναι αδύνατη διότι $ημβ \le 1 < x$.
- Αν x < -1 η ανίσωση (2) ισχύει διότι $ημβ \ge -1 > x$.
- Αν $0 \le x \le 1$, τότε ημβ > 0 και εφα > 0

$$(2) \Leftrightarrow ημ^2β > εφ^2α \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{2+x^2} > x^2 \Leftrightarrow 1+x^2 > 2x^2 + x^4 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + \frac{1}{4} < \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2 < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overset{x\ge 0}{\Leftrightarrow} 0 \le x < \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

- Αν $-1 \le x < 0$, τότε :
  - ▷ Αν $α \in A_{11}$ και $συνα \in A_{21}$

    εφα < 0 ⇒ συνα > 0 ⇒ σφβ > 0 ⇒ ημβ > 0 και η (2) ισχύει
  - ▷ Αν $α \in A_{11}$ και $συνα \in A_{22}$

    εφα < 0 ⇒ συνα > 0 ⇒ σφβ > 0 ⇒ ημβ < 0

    $$(2) \Leftrightarrow -ημβ < -εφα \Leftrightarrow ημ^2β < εφ^2α \Leftrightarrow \frac{1+x^2}{2+x^2} < x^2 \Leftrightarrow 1+x^2 < 2x^2 + x^4 \Leftrightarrow$$

    $$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 > \frac{5}{4} \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x^2 > \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overset{x<0}{\Leftrightarrow} -1 \le x < -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$
  - ▷ Αν $α \in A_{12}$ και $συνα \in A_{21}$ όμοια εφα < 0 ⇒ ... ημβ > 0 και η (2) ισχύει
  - ▷ Αν $α \in A_{12}$ και $συνα \in A_{22}$ όμοια εφα < 0 ⇒ ... ημβ < 0

    $$(2) \Leftrightarrow -ημβ < -εφα \Leftrightarrow ημ^2β < εφ^2α \Leftrightarrow \ldots -1 \le x < -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

Επομένως $\mathbf{x} \in \left(\mathbf{-\infty}, \sqrt{\dfrac{\mathbf{\sqrt{5}-1}}{\mathbf{2}}}\right)$