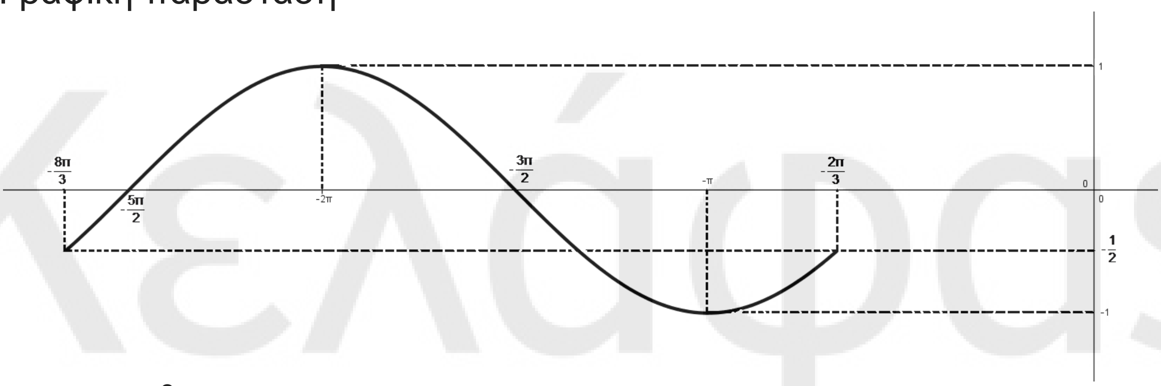
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 7 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1^{ο}

- $συν\left(-\frac{8π}{3}\right) = συν\left(-2π - \frac{2π}{3}\right) = συν\left(-\frac{2π}{3}\right) = συν\frac{2π}{3} = -συν\frac{π}{3} = -\frac{1}{2}$
- $συν\left(-\frac{5π}{2}\right) = συν\left(-2π - \frac{π}{2}\right) = συν\left(-\frac{π}{2}\right) = συν\frac{π}{2} = 0$
- $συν(-2π) = συν0 = 1$
- $συν\left(-\frac{3π}{2}\right) = συν\frac{3π}{2} = 0$
- $συν(-π) = συνπ = -1$
- $συν\left(-\frac{2π}{3}\right) = συν\frac{2π}{3} = -συν\frac{π}{3} = -\frac{1}{2}$

x	$-\frac{8π}{3}$	↗	$-\frac{5π}{2}$	↗	$-2π$	↗	$-\frac{3π}{2}$	↗	$-π$	↗	$-\frac{2π}{3}$
συνx	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	$-\frac{1}{2}$

Γραφική παράσταση



Ζήτημα 2^{ο}

$$ημA + ημΓ = 2\cdot ημB \Leftrightarrow 2\cdot ημ\frac{A+Γ}{2}\cdot συν\frac{A-Γ}{2} = 4\cdot ημ\frac{B}{2}\cdot συν\frac{B}{2} \Leftrightarrow$$

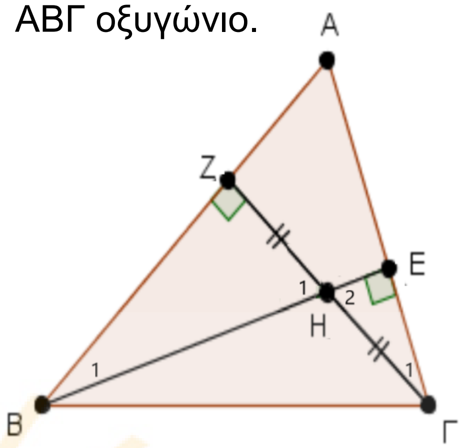
$$\cancel{2}\,\cancel{συν\frac{B}{2}}\cdot συν\frac{A-Γ}{2} = \overset{2}{\cancel{4}}\cdot συν\frac{A+Γ}{2}\cdot \cancel{συν\frac{B}{2}} \overset{συν\frac{B}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow} συν\left(\frac{A}{2} - \frac{Γ}{2}\right) = 2\cdot συν\left(\frac{A}{2} + \frac{Γ}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2} + ημ\frac{A}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2} = 2\cdot συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2} - 2\cdot ημ\frac{A}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2} \Leftrightarrow$$

$$3\cdot ημ\frac{A}{2}\cdot ημ\frac{Γ}{2} = συν\frac{A}{2}\cdot συν\frac{Γ}{2} \underset{συν\frac{Γ}{2}\neq 0}{\overset{συν\frac{A}{2}\neq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{ημ\frac{A}{2}}{συν\frac{A}{2}}\cdot\frac{ημ\frac{Γ}{2}}{συν\frac{Γ}{2}} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \boldsymbol{εφ\frac{A}{2}\cdot εφ\frac{Γ}{2} = \frac{1}{3}}$$

Ζήτημα 3ο

α) Το H είναι εσωτερικό του $ΑΒΓ$, άρα $ΑΒΓ$ οξυγώνιο.



1η λύση

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^0 - \hat{Γ}_1 = \hat{A}$$

$$\overset{\Delta}{BZH}: εφH_1 = \frac{BZ}{BH} \Rightarrow εφA = \frac{BZ}{BH} \quad (1)$$

$$\overset{\Delta}{BZΓ}: εφB = \frac{ΓZ}{BZ} = \frac{2\cdot BH}{BZ} \quad (2)$$

$$εφA\cdot εφB \overset{(1)}{\underset{(2)}{=}} \frac{\cancel{BZ}}{\cancel{BH}}\cdot\frac{2\cdot \cancel{BH}}{\cancel{BZ}} = 2$$

2η λύση

$$HΓ = \frac{EΓ}{ημA} = \frac{EΓ}{\frac{α}{2R}} = 2R\cdot\frac{EΓ}{α} = 2R\cdot συνΓ \quad (1)$$

$$ΓZ = β\cdot ημA = 2R\cdot ημA\cdot ημB \quad (2)$$

$$ΓZ = 2ΓH \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \cancel{2R}\cdot ημA\cdot ημB = 2\cdot \cancel{2R}\cdot συνΓ \Leftrightarrow$$

$$ημA\cdot ημB = -2\cdot συν(A+B) \Leftrightarrow$$

$$ημA\cdot ημB = -2(συνA\cdot συνB - ημA\cdot ημB) \Leftrightarrow$$

$$ημA\cdot ημB = -2συνA\cdot συνB + 2ημA\cdot ημB \Leftrightarrow$$

$$ημA\cdot ημB = 2συνA\cdot συνB \overset{συνA\neq 0}{\underset{συνB\neq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{ημA}{συνA}\cdot\frac{ημB}{συνB} = 2 \Leftrightarrow$$

$$εφA\cdot εφB = 2$$

3η λύση

$$HZ = BZ\cdot εφB_1 = BZ\cdot εφ(90^0 - A) = BΓ\cdot συνB\cdot σφA = BΓ\cdot\frac{συνA\cdot συνB}{ημA} \quad (1)$$

$$HΓ = \frac{EΓ}{συνΓ_1} = \frac{BΓ\cdot συνΓ}{συν(90^0 - A)} = BΓ\cdot\frac{συνΓ}{ημA} \quad (2)$$

$$HZ = HΓ \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \cancel{BΓ}\cdot\frac{συνA\cdot συνB}{\cancel{ημA}} = \cancel{BΓ}\cdot\frac{συνΓ}{\cancel{ημA}} \Leftrightarrow$$

$$συνA\cdot συνB = συνΓ \Leftrightarrow$$

$$συνA\cdot συνB = -συν(A+B) \Leftrightarrow$$

$$συνA\cdot συνB = -συνA\cdot συνB + ημA\cdot ημB \Leftrightarrow$$

$$ημA\cdot ημB = 2συνA\cdot συνB \overset{συνA\neq 0}{\underset{συνB\neq 0}{\Leftrightarrow}} \frac{ημA}{συνA}\cdot\frac{ημB}{συνB} = 2 \Leftrightarrow$$

$$εφA\cdot εφB = 2$$

β) $\varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi\Gamma \Leftrightarrow \dfrac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{1 - \varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B} = -\varepsilon\varphi\Gamma \overset{\varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B=2}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{-1} = -\varepsilon\varphi\Gamma \Leftrightarrow \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi\Gamma$$

$$\begin{cases} \varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi\Gamma \\ \varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{εφΑ, εφΒ είναι οι ρίζες της εξίσωσης } \omega^2 - \varepsilon\varphi\Gamma \cdot \omega + 2 = 0$$

$$\Delta = \varepsilon\varphi^2\Gamma - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^2\Gamma \geq 8 \overset{\text{οξυγώνιο}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi\Gamma \geq 2\sqrt{2}$$

- Αν $\varepsilon\varphi\Gamma < 2\sqrt{2}$ είναι $\Delta < 0$ και το πρόβλημα δεν έχει λύση
- Αν $\varepsilon\varphi\Gamma = 2\sqrt{2}$ είναι $\Delta = 0$, άρα $\hat{A} = \hat{B} = 90^0 - \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$ (κατασκευάζονται εύκολα)
- Αν $\varepsilon\varphi\Gamma > 2\sqrt{2}$ είναι $\Delta > 0$ και $\varepsilon\varphi A = \dfrac{\varepsilon\varphi\Gamma + \sqrt{\varepsilon\varphi^2\Gamma - 8}}{2}$, $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\varepsilon\varphi\Gamma - \sqrt{\varepsilon\varphi^2\Gamma - 8}}{2}$

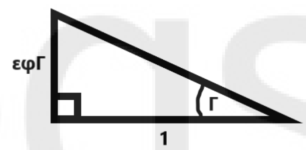
ή $\varepsilon\varphi A = \dfrac{\varepsilon\varphi\Gamma - \sqrt{\varepsilon\varphi^2\Gamma - 8}}{2}$, $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\varepsilon\varphi\Gamma + \sqrt{\varepsilon\varphi^2\Gamma - 8}}{2}$

Κατασκευή των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ με γνωστή τη $\hat{\Gamma}$

$\omega^2 - \varepsilon\varphi\Gamma \cdot \omega + 2 = 0 \Leftrightarrow \omega \cdot (\varepsilon\varphi\Gamma - \omega) = 2$ (3)

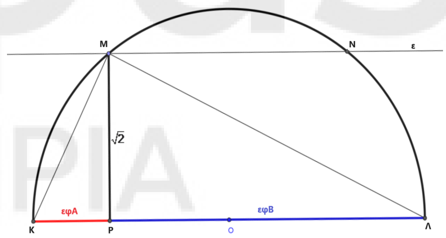
1. Κατασκευή τμήματος με μήκος εφΓ

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία Γ και προσκείμενη κάθετη πλευρά ίση με 1, τότε η άλλη κάθετη ισούται με εφΓ.



2. Κατασκευή τμημάτων με μήκη εφΑ και εφΒ

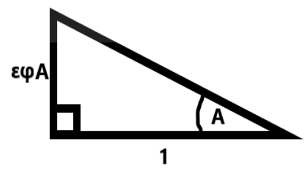
Με διάμετρο $K\Lambda = \varepsilon\varphi\Gamma > 2\sqrt{2}$ γράφουμε ημικύκλιο.
Φέρουμε ευθεία ε παράλληλη στην ΚΛ
η οποία απέχει από την ΚΛ απόσταση $\sqrt{2}$
και τέμνει την ΚΛ στα Μ και Ν.
Από το Μ φέρουμε $MP \perp K\Lambda$.



Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{K\Lambda M}$ είναι $KP \cdot P\Lambda = MP^2 \Leftrightarrow$

$KP \cdot (K\Lambda - KP) = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow KP \cdot (\varepsilon\varphi\Gamma - KP) = 2 \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$KP = \varepsilon\varphi A$ και $P\Lambda = \varepsilon\varphi B$ (ή $KP = \varepsilon\varphi B$ και $P\Lambda = \varepsilon\varphi A$)



3. Κατασκευή των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$

Κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές εφα και 1.

Η οξεία γωνία απέναντι από την πλευρά με μήκος εφα είναι ίση με την $\hat{A}$

Ομοίως κατασκευάζουμε τη $\hat{B}$.