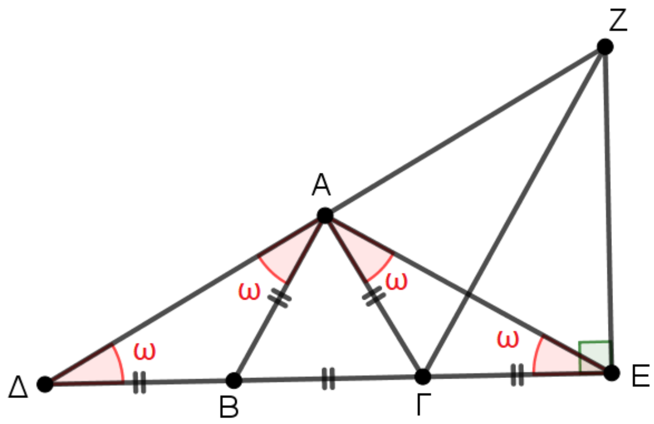

α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο ισχύει ότι $\mathrm{B\hat{A}\Gamma} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B} = 60^o$.

Οι $\mathrm{A\hat{B}\Delta}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$ είναι παραπληρωματικές των $\mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$, αντίστοιχα.

Άρα είναι $\mathrm{A\hat{B}\Delta} = \mathrm{A\hat{\Gamma}E} = 180^o - 60^o = 120^o$.

Επίσης, ισχύει ότι ΑΒ = ΑΔ = ΑΓ = ΓΕ, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα (λόγω του Π-Γ-Π) και ισοσκελή.

Αν συμβολίσουμε με ω κάθε μια από τις γωνίες που αντιστοιχούν στις βάσεις τους, τότε από το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΑΒΔ βρίσκουμε:

$\mathrm{A\hat{B}\Delta} + \mathrm{A\hat{\Delta}B} + \mathrm{\Delta\hat{A}B} = 180^o \Leftrightarrow 120^o + 2\omega = 180^o \Leftrightarrow 2\omega = 60^o \Leftrightarrow \omega = 30^o$.

β) Είναι $\mathrm{\Delta\hat{A}\Gamma} = \mathrm{\Delta\hat{A}B} + \mathrm{B\hat{A}\Gamma} = 30^o + 60^o = 90^o$. Άρα $\mathrm{\Gamma A} \perp \mathrm{A\Delta}$, άρα $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z} = 90^o$.

Τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ:

- Είναι ορθογώνια, με ορθές τις $\mathrm{\Gamma\hat{A}Z}$ και $\mathrm{\Gamma\hat{E}Z}$.
- Έχουν τη ΓΖ κοινή πλευρά.
- Έχουν ΑΓ = ΓΕ.

Άρα τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΓΕΖ έχουν κοινή υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά, ίσες μία προς μία, επομένως είναι ίσα. Οπότε ΖΑ = ΖΕ (καθώς είναι η άλλη κάθετη πλευρά τους).

Επομένως το Ζ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ.

Επειδή ΓΑ = ΓΕ, το Γ ισαπέχει από τα Α και Ε, άρα ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΕ. Επομένως, η ΓΖ είναι η μεσοκάθετος του ΑΕ.

γ) Από την ισότητα των τριγώνων ΓΑΖ και ΓΕΖ προκύπτει ότι $\mathrm{A\hat{\Gamma}Z} = \mathrm{E\hat{\Gamma}Z}$, καθώς βρίσκονται απέναντι από τις ίσες πλευρές ΑΖ και ΕΖ. Οπότε η ΓΖ είναι διχοτόμος της $\mathrm{A\hat{\Gamma}E}$. Άρα $\mathrm{A\hat{\Gamma}Z} = \frac{\mathrm{A\hat{\Gamma}E}}{2} = \frac{120^o}{2} = 60^o$.

Άρα $A\hat{\Gamma}Z = B\hat{A}\Gamma$, οπότε οι ευθείες ΑΒ και ΓΖ που τέμνονται από την ΑΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες $A\hat{\Gamma}Z$ και $B\hat{A}\Gamma$ ίσες. Άρα ΑΒ//ΓΖ