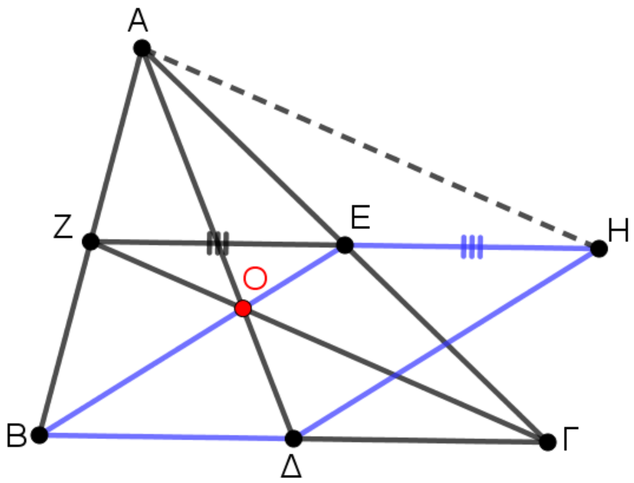


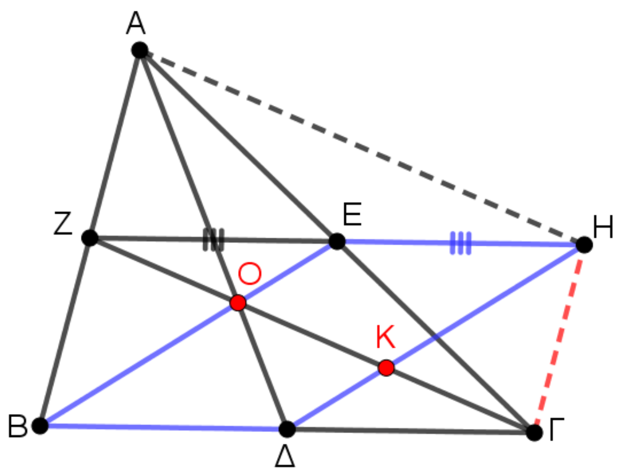
α) Το σημείο Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα ΒΔ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Το ΖΕ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ΑΒΓ, οπότε ισχύει ότι ΖΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$ και το ΖΕ είναι παράλληλο του ΒΓ.

Επομένως ΖΕ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα. Όμως ΖΕ = ΕΗ και βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Άρα τα ΕΗ και ΒΔ είναι ίσα και παράλληλα.

Άρα στο τετράπλευρο ΕΗΔΒ δύο απέναντι πλευρές του (οι ΕΗ και ΒΔ), είναι ίσες και παράλληλες οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

β) Από την υπόθεση ισχύει ακόμη ότι ΕΗ = ΖΕ και ΑΕ = ΕΓ, άρα οι διαγώνιες ΑΓ και ΖΗ του τετραπλεύρου ΑΖΓΗ διχοτομούνται, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



Άρα ισχύει ότι ΓΖ = ΑΗ (1), ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

Από το α), το ΕΗΔΒ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ισχύει ότι ΒΕ = ΔΗ (2).

Οι διάμεσοι του τριγώνου ΑΒΓ είναι οι ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ.

Για τη περίμετρο του τριγώνου ΑΔΗ, με τη βοήθεια των (1) και (2) έχουμε:

$$Π = ΑΔ + ΔΗ + ΑΗ = ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ$$

γ) Το σημείο τομής Ο των διαμέσων ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Άρα, ισχύει ότι ΟΖ = $\frac{ΟΓ}{2}$ (3).

Στο τρίγωνο ΒΓΟ, το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και η ΔΗ είναι παράλληλη στην ΒΟ. Άρα το Κ είναι μέσο της πλευράς ΟΓ, οπότε ΟΚ = ΚΓ = $\frac{ΟΓ}{2}$ (4).

Από τις (3), (4) προκύπτει ότι ΟΖ = ΟΚ = ΚΓ, δηλαδή οι ΒΕ και ΔΗ τριχοτομούν τη ΓΖ.