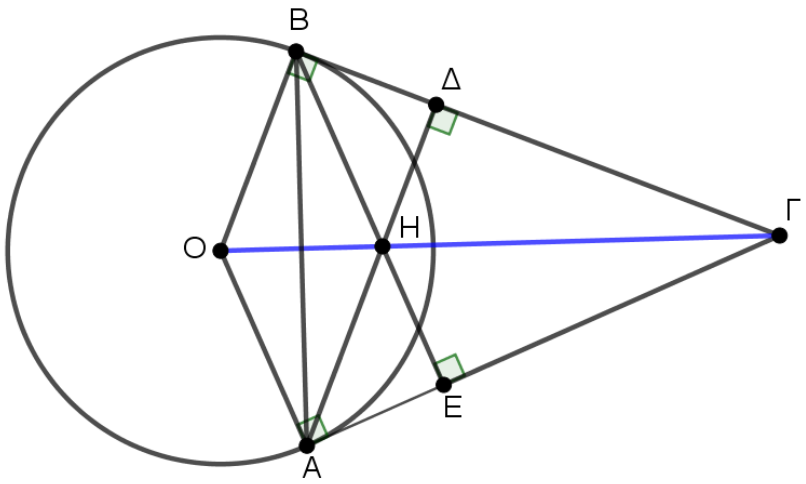

α) Είναι ΑΓ = ΒΓ ως εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το σημείο Γ. Άρα το τρίγωνα ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΒΔ.

- Είναι ορθογώνια
- Έχουν ΑΒ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)
- Έχουν $A\widehat{B}\Delta$ = $B\widehat{A}E$, ως γωνίες προσκείμενες στη βάση ΑΒ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, ως ορθογώνια που έχουν τις υποτείνουσες και μια οξεία γωνία ίσες μία προς μία. Οπότε ισχύει και $A\widehat{B}E$ = $B\widehat{A}\Delta$, άρα το τρίγωνο ΒΗΑ είναι ισοσκελές με βάση της ΑΒ.

β) Επειδή ΟΑ, ΟΒ ακτίνες του κύκλου, ισχύει ότι ΟΑ ⊥ ΑΓ και ΟΒ ⊥ ΒΓ[1], δηλαδή είναι κάθετες στα αντίστοιχα εφαπτόμενα τμήματα. Όμως ΒΕ ⊥ ΑΓ και ΑΔ ⊥ ΒΓ.

Άρα ΟΑ // ΒΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ και ΟΒ // ΑΔ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ. Οπότε το τετράπλευρο ΟΒΗΑ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή ΟΑ = ΟΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, το παραλληλόγραμμο ΟΒΗΑ έχει δύο διαδοχικές πλευρές του ίσες (τις ΟΑ και ΟΒ) οπότε είναι ρόμβος.

γ) Είναι ΟΗ ⊥ ΑΒ διότι, ως διαγώνιοι του ρόμβου ΟΒΗΑ τέμνονται κάθετα.

Επίσης τα τμήματα ΓΑ και ΓΒ είναι εφαπτόμενα στον κύκλο οπότε η ΟΓ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ. Επομένως ΟΓ ⊥ ΑΒ (2). Όμως από το Ο διέρχεται μοναδική κάθετη στην ΑΒ άρα τα σημεία Ο, Η και Γ είναι συνευθειακά.

[1] το σύμβολο ⊥ σημαίνει «κάθετες».