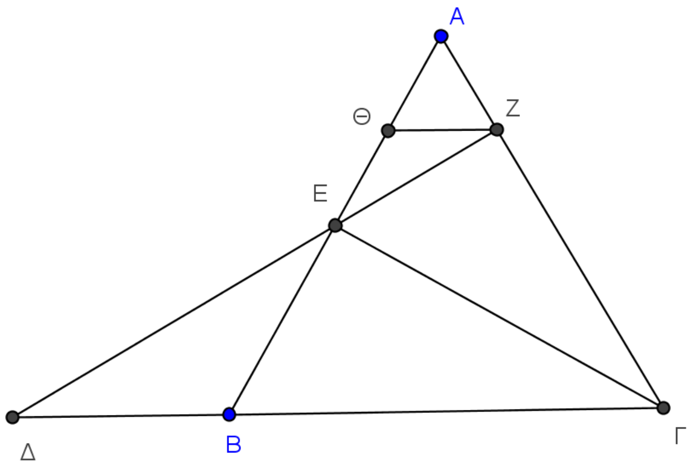

α) Το ΓΕ είναι ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, άρα είναι διάμεσος και διχοτόμος του. Συγκεκριμένα είναι διάμεσος της πλευράς ΑΒ, άρα ΒΕ = $\frac{AB}{2}$.

Επίσης, από την υπόθεση ΒΔ = $\frac{B\Gamma}{2}$.

Όμως ΑΒ = ΒΓ, καθώς το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, άρα ΒΕ = ΒΔ και επομένως το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι $\hat{A} = A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B = 60^o$.

Είναι ακόμη $A\hat{\Theta}Z = A\hat{B}\Gamma$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΒ. Άρα $A\hat{\Theta}Z = 60^o$.

Ισχύει ακόμη ότι $A\hat{Z}\Theta = A\hat{\Gamma}B$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΘΖ, ΒΓ που τέμνονται από την ΑΓ. Άρα $A\hat{Z}\Theta = 60^o$.

Συνεπώς, από τα παραπάνω στο τρίγωνο ΑΘΖ ισχύει $A\hat{\Theta}Z = A\hat{Z}\Theta = \hat{A} = 60^o$, οπότε είναι ισόπλευρο.

β) Οι γωνίες $E\hat{\Theta}Z$ και $A\hat{\Theta}Z$ είναι παραπληρωματικές. Άρα, $E\hat{\Theta}Z + A\hat{\Theta}Z = 180^o \Leftrightarrow E\hat{\Theta}Z = 180^o - A\hat{\Theta}Z \Leftrightarrow E\hat{\Theta}Z = 180^o - 60^o = 120^o$.

Η γωνία $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΒΔΕ, άρα $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Delta} + \Delta\hat{E}B \Leftrightarrow 60^o = \hat{\Delta} + \Delta\hat{E}B$.

Όμως το ΒΔΕ, όπως έχει αποδειχθεί στο α) είναι ισοσκελές με βάση ΔΕ, άρα οι γωνίες της βάσης, $\hat{\Delta}$ και $\Delta\hat{E}B$ είναι ίσες. Επομένως $60^o = 2\Delta\hat{E}B \Leftrightarrow \Delta\hat{E}B = 30^o$.

Οπότε και $\Theta\hat{E}Z = 30^o$ ως κατακορυφήν της $\Delta\hat{E}B$.

Από το άθροισμα γωνιών στο τρίγωνο ΘΕΖ, βρίσκουμε:

$\Theta\hat{E}Z + E\hat{\Theta}Z + \Theta\hat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow 30^o + 120^o + \Theta\hat{Z}E = 180^o \Leftrightarrow \Theta\hat{Z}E = 30^o$.

γ) Επειδή $\Theta\hat{E}Z = \Theta\hat{Z}E = 30^o$, το τρίγωνο ΘΖΕ είναι ισοσκελές, άρα ΘΕ = ΘΖ.

Όμως το ΑΘΖ είναι ισόπλευρο, όπως έχει αποδειχθεί στο α), άρα ΘΖ = ΘΑ ως πλευρές ισόπλευρου και άρα ισχύει ότι ΘΕ = ΘΖ = ΘΑ. Όμως ΑΕ = ΘΑ + ΘΕ ή ΑΕ = 2ΘΖ .

δ) Από τα προηγούμενα ΑΕ = ΕΒ = $\frac{\mathrm{AB}}{2}$ και ΘΕ = $\frac{\mathrm{AE}}{2}$, άρα ΘΕ = $\frac{\mathrm{AB}}{4}$.

ΘΒ = ΘΕ + ΕΒ = $\frac{\mathrm{AB}}{4} + \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{3\mathrm{AB}}{4}$.

Άρα 4ΘΒ = 3ΑΒ.