



α) Επειδή τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Gamma E$ είναι ισόπλευρα, ισχύει ότι $\widehat{\Delta AB} = \widehat{E\Gamma B} = 60^\circ$. Άρα οι ευθείες AD και BE , που τέμνονται από την AZ έχουν δύο εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες. Συνεπώς είναι παράλληλες. Άρα $DH \parallel BE$.

Επίσης, $DH = \frac{AD}{2}$, επειδή το H είναι μέσο του AD από την υπόθεση.

Όμως $AD = AB$, ως πλευρές του ισοπλεύρου τριγώνου $AB\Delta$. Άρα, $DH = \frac{AB}{2}$.

Αλλά από την υπόθεση έχουμε και ότι $B\Gamma = \frac{AB}{2}$. Άρα, $DH = B\Gamma$.

Όμως $BE = B\Gamma$, ως πλευρές του ισοπλεύρου $B\Gamma E$. Άρα, $DH = BE$.

Τελικά το τετράπλευρο $BHDE$ έχει $DH \parallel BE$ και $DH = BE$, δηλαδή δύο πλευρές παράλληλες και ίσες. Επομένως είναι παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον, στο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Delta$ το BH είναι διάμεσος, άρα και ύψος, οπότε η γωνία $B\widehat{H}\Delta$ είναι ορθή. Άρα, το παραλληλόγραμμο $BHDE$ έχει μία ορθή γωνία, επομένως είναι ορθογώνιο.

β) Λόγω του ορθογωνίου $BHDE$ είναι $BH \parallel DE$. Άρα, στο τρίγωνο ADZ , η HB διέρχεται από το μέσο H της πλευράς AD και είναι παράλληλη στην DZ . Επομένως, θα διέρχεται από το μέσο της AZ , άρα το B είναι μέσο της AZ .

Άρα, $AB = BZ$.

Όμως $AB = 2B\Gamma$ από την υπόθεση, άρα $BZ = 2B\Gamma$, δηλαδή το Γ είναι μέσο της BZ .

Επομένως $B\Gamma = \Gamma Z$.

Όμως από το ισόπλευρο τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι $B\Gamma = \Gamma E$. Άρα $\Gamma E = \Gamma Z$, δηλαδή το ΓZE είναι ισοσκελές.

γ) Προκύπτει ότι το E είναι μέσο της ΔZ: Πράγματι, στο τρίγωνο ΑΔZ, το ΒE διέρχεται από το μέσο Β της ΑZ και είναι παράλληλο στην ΑΔ. Άρα, θα διέρχεται από το μέσο της ΔZ.

Παραμένοντας στο τρίγωνο ΑΔZ, ισχύει ότι τα Η και Ε είναι μέσα των πλευρών ΑΔ και ΔZ, αντίστοιχα. Άρα, η ΕΗ είναι παράλληλη στην ΑZ (ή αλλιώς στην ΑΓ).

Επίσης, $\widehat{H\hat{A}B} = \widehat{E\hat{\Gamma}B} = 60^\circ$, λόγω των ισοπλεύρων τριγώνων ΑΒΔ και ΒΓΕ.

Άρα:

- Εφόσον $\widehat{H\hat{A}B} + \widehat{E\hat{\Gamma}B} < 180^\circ$, οι ευθείες ΑΗ και ΓΕ τέμνονται στο ημιεπίπεδο που χωρίζεται από το ΑZ και προς το μέρος του Δ και άρα δεν είναι παράλληλες. Αυτό σημαίνει ότι λόγω της παραλληλίας των ΕΗ και ΑΓ το ΗΕΓΑ είναι τραπέζιο.
- Επειδή οι γωνίες της βάσης του ΗΕΓΑ είναι ίσες, αυτό είναι ισοσκελές τραπέζιο.