

α) Στο τρίγωνο ΑΚΕ το ΚΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

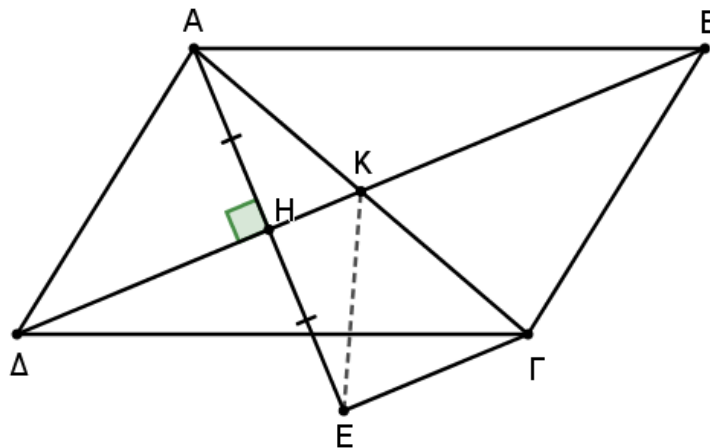
β) Επειδή ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται, οπότε το

Κ είναι μέσο της ΑΓ, οπότε $ΚΑ = \frac{ΚΓ}{2}$.

Αξιοποιώντας το ερώτημα (α) βρίσκουμε:

$$ΕΚ = ΚΑ \Leftrightarrow ΕΚ = \frac{ΚΓ}{2}$$

Άρα στο τρίγωνο ΑΕΓ η διάμεσός του ΕΚ ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, συνεπώς το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με $\widehat{ΑΕΓ} = 90^\circ$.



γ) Ισχύει ότι:

$ΗΚ \perp ΑΕ$ και $ΕΓ \perp ΑΕ$, άρα $ΗΚ \parallel ΕΓ \Leftrightarrow ΒΔ \parallel ΕΓ$ (1)

Στο τρίγωνο ΑΔΕ το ΔΗ είναι ύψος και διάμεσος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές με $ΔΕ = ΑΔ$. Επειδή $ΑΔ = ΒΓ$, προκύπτει ότι $ΔΕ = ΒΓ$ (2).

Επίσης, $\widehat{ΕΔΒ} = \widehat{Β}_2$ ως εντός και εναλλάξ γωνίες στις παράλληλες ευθείες ΑΒ και ΓΔ.

Οπότε $\widehat{Β}_1 + \widehat{ΕΔΒ} = \widehat{Β}_1 + \widehat{Β}_2 = \widehat{Β} < 180^\circ$ (3) άρα οι ΔΕ και ΒΓ δεν είναι παράλληλες (3).

Από τις (1),(2) και (3) προκύπτει ότι το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

