

α) Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, έχουμε:

$$\widehat{ΑΒΓ} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow 3\widehat{\Gamma} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{\Gamma} = 30^\circ$$

$$\text{Τότε } \widehat{ΑΒΓ} = 2\widehat{\Gamma} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$$

Επομένως:

$$\widehat{ΕΒΔ} = 180^\circ - \widehat{ΑΒΓ} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Από το άθροισμα γωνιών του ισοσκελούς τριγώνου ΒΔΕ έχουμε:

$$\widehat{ΕΒΔ} + \widehat{Ε} + \widehat{ΕΔΒ} = 180^\circ \Leftrightarrow 120^\circ + 2\widehat{Ε} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{Ε} = 30^\circ. \text{ Άρα και } \widehat{ΕΔΒ} = 30^\circ$$

β) i. Από το άθροισμα γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ έχουμε:

$$\widehat{ΒΑΔ} + \widehat{Β} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΒΑΔ} + 60^\circ = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ΒΑΔ} = 30^\circ$$

Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΔ ισχύει ότι:

$$ΒΔ = \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΒΕ = \frac{ΑΒ}{2}.$$

ii. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\Gamma = 30^\circ$, οπότε ισχύει ότι:

$$ΑΒ = \frac{ΒΓ}{2} \Leftrightarrow ΒΓ = 2ΑΒ.$$

$$\text{Έτσι } ΓΔ = ΒΓ - ΒΔ = 2ΑΒ - \frac{ΑΒ}{2} = \frac{3}{2} ΑΒ \quad (1)$$

Ισχύει ακόμη ότι:

$$ΑΕ = ΑΒ + ΒΕ \Leftrightarrow ΑΕ = ΑΒ + \frac{ΑΒ}{2} \Leftrightarrow ΑΕ = \frac{3}{2} ΑΒ \quad (2)$$

Από (1), (2) συμπεραίνουμε ότι $ΑΕ = ΓΔ$.

