

α) Οι Bx και By είναι διχοτόμοι των γωνιών \widehat{B} και $\widehat{B_{εξ}}$, θέτουμε $\widehat{\Gamma\widehat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\widehat{B}A} = \widehat{\omega}$ και $\widehat{A\widehat{B}E} = \widehat{E\widehat{B}Z} = \widehat{\varphi}$. Τότε:

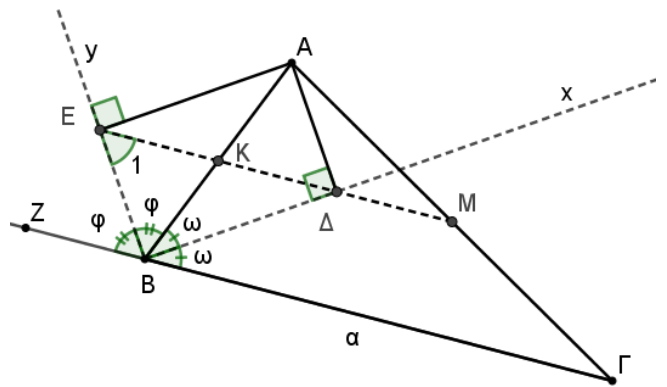
$$\widehat{\Gamma\widehat{B}\Delta} + \widehat{\Delta\widehat{B}A} + \widehat{A\widehat{B}E} + \widehat{E\widehat{B}Z} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\omega} + \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} + \widehat{\varphi} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{\omega} + 2\widehat{\varphi} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{E\widehat{B}\Delta} = \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} = 90^\circ$$

Το τετράπλευρο AΔBE έχει τρεις γωνίες ορθές άρα είναι ορθογώνιο.



β) Οι διαγώνιοι ED και AB του ορθογωνίου AΔBE είναι ίσες και διχοτομούνται. Άρα:

$$AB = ED \Leftrightarrow \frac{AB}{2} = \frac{ED}{2} \Leftrightarrow KB = KD$$

Επομένως το τρίγωνο KBD είναι ισοσκελές και ισχύει ότι $\widehat{K\widehat{B}\Delta} = \widehat{K\widehat{\Delta}B}$ (1).

Ισχύει ακόμη ότι $\widehat{K\widehat{B}\Delta} = \widehat{\Delta\widehat{B}\Gamma} = \widehat{\omega}$ (2).

Από (1), (2) βρίσκουμε $\widehat{K\widehat{\Delta}B} = \widehat{\Delta\widehat{B}\Gamma}$.

Δηλαδή οι ευθείες ED και BΓ που τέμνονται από τη ΒΔ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα είναι $ED \parallel B\Gamma$.

Στο τρίγωνο ABΓ το K είναι μέσο της AB και $KM \parallel B\Gamma$, άρα η KM διέρχεται από το μέσο M της AΓ.

γ) Επειδή το KM ενώνει μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ABΓ, είναι $KM \parallel B\Gamma$ (3) και

$$KM = \frac{B\Gamma}{2} \quad (4)$$

Από την (3) και γνωρίζοντας ότι οι KB και MΓ δεν είναι παράλληλες αφού τέμνονται στο A, προκύπτει ότι το τετράπλευρο KMGΒ είναι τραπέζιο. Η διάμεσος του

τραπεζίου, είναι ίση με: $\frac{KM+B\Gamma}{2}$. Αντικαθιστώντας το KM από τη σχέση (4) έχουμε

$$\frac{\frac{B\Gamma}{2} + B\Gamma}{2} = \frac{\frac{3B\Gamma}{2}}{2} = \frac{3B\Gamma}{4} = \frac{3\alpha}{4}$$