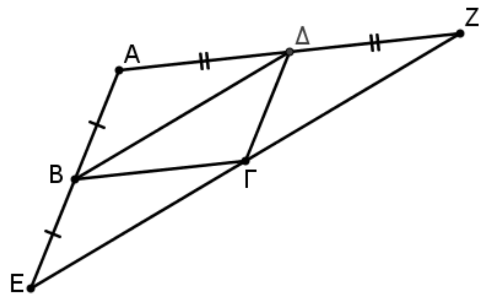
α) i. Είναι

AB //= ΓΔ ⇔ ΒΕ // = ΓΔ

Οπότε στο τετράπλευρο ΒΔΓΕ δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.



Όμοια ΑΔ // = ΒΓ ⇔ ΔΖ // = ΒΓ.

Επομένως το τετράπλευρο ΒΔΖΓ έχει δύο απέναντι πλευρές του ίσες και παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμο.

ii. Επειδή το ΒΔΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι ΕΓ // ΒΔ (1).

Όμοια, το ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε: ΓΖ// ΒΔ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΕΓ //ΓΖ, άρα τα σημεία Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.

β) Επειδή ΒΔ //ΕΖ, και οι ΕΒ και ΖΔ τέμνονται στο Α, το τετράπλευρο ΒΔΖΕ είναι τραπέζιο.

Η ΚΛ είναι διάμεσος του τραπεζίου, άρα

ΚΛ //ΔΒ και

$$ΚΛ=\frac{ΔΒ+ΕΖ}{2}=\frac{ΔΒ+ΕΓ+ΓΖ}{2}=\frac{ΔΒ+ΔΒ+ΔΒ}{2}=\frac{3ΔΒ}{2}$$