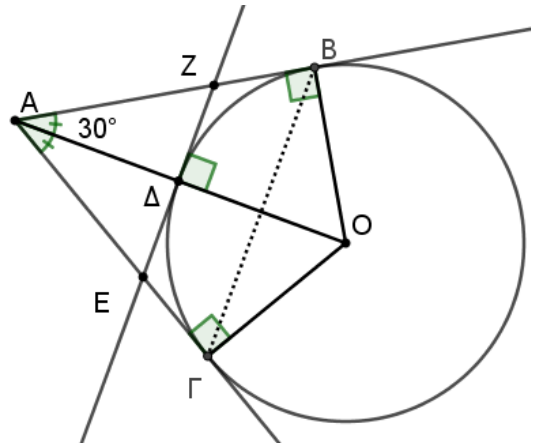
α) Οι εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ είναι κάθετες στις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ, άρα $ΟΒ \perp ΑΒ$ και $ΟΓ \perp ΑΓ$ οπότε $Ο\hat{Β}Α = Ο\hat{Γ}Α = 90^o$.

Στο τετράπλευρο ΑΒΟΓ είναι $Ο\hat{Β}Α + Ο\hat{Γ}Α = 90^o + 90^o = 180^o$ οπότε είναι εγγράψιμο.

Η διακεντρική ευθεία ΑΟ διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων, δηλαδή

$Ο\hat{Α}Β = \frac{Β\hat{Α}Γ}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι $Ο\hat{Α}Β = 30^o$, άρα η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $ΟΒ = \frac{ΟΑ}{2} \Leftrightarrow ΟΑ = 2ΟΒ$.



β) Η ΖΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, άρα $ΖΕ \perp ΟΔ$.

Στο τρίγωνο ΑΖΕ το ΑΔ είναι ύψος και διχοτόμος, άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επειδή $Β\hat{Α}Γ = 60^o$ το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ) Τα τμήματα ΖΒ και ΖΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα που άγονται από το Ζ, οπότε

ΖΒ = ΖΔ (1). Στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΕΖ, το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος οπότε:

$ΖΒ = ΖΔ = \frac{ΕΖ}{2} \Leftrightarrow ΖΒ = \frac{ΑΖ}{2} \Leftrightarrow ΑΖ = 2ΖΒ$

δ) Η ΑΟ είναι μεσοκάθετη της χορδής ΒΓ που έχει άκρα τα σημεία επαφής. Τότε:

$ΒΓ \perp ΑΔ$ και $ΕΖ \perp ΑΔ$. Άρα ΕΖ // ΒΓ, και οι πλευρές ΒΖ και ΕΓ τέμνονται στο Α, άρα δεν είναι παράλληλες, οπότε ΕΖΒΓ τραπέζιο. Επίσης τα τμήματα ΕΓ και ΕΔ είναι εφαπτόμενα του κύκλου που άγονται από το Ε, άρα ΕΓ = ΕΔ (2).

Επειδή ΖΔ = ΕΔ, από τις (1), (2) προκύπτει ΖΒ = ΕΓ, οπότε το τραπέζιο ΕΖΒΓ είναι ισοσκελές.