

α) Επειδή το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο, ισχύει ότι:

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \widehat{B} = \widehat{B\hat{\Gamma}A} = 60^\circ$$

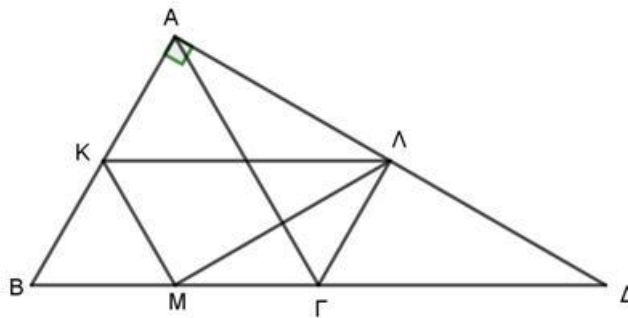
Ισχύει ακόμη ότι $\Gamma\Delta = B\Gamma$ και $B\Gamma = A\Gamma$, άρα $B\Gamma = A\Gamma$, οπότε το τρίγωνο AΓΔ είναι ισοσκελές. Τότε: $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = \widehat{\Delta}$

Η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο AΓΔ, άρα

$$A\hat{\Gamma}B = \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} + \widehat{\Delta} \Leftrightarrow 60^\circ = 2\widehat{\Delta} \Leftrightarrow \widehat{\Delta} = 30^\circ$$

Οπότε είναι και $\widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 30^\circ$. Ισχύει ακόμη ότι:

$$\widehat{B\hat{A}\Delta} = \widehat{B\hat{A}\Gamma} + \widehat{\Gamma\hat{A}\Delta} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$$



β) i. Το ΚΛ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΔ, οπότε

$$ΚΛ // B\Delta \Leftrightarrow ΚΛ // M\Gamma$$

- $\widehat{M\hat{K}L} = \widehat{K\hat{M}B}$ ως εντός εναλλάξ που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΛ και ΒΔ που τέμνονται από την ΚΜ.
- $\widehat{K\hat{M}B} = A\hat{\Gamma}B = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες ΚΜ και ΑΓ διότι το ΚΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ στο τρίγωνο ΑΒΓ, που τέμνονται από την ΒΓ.
- $\widehat{K\hat{L}\Gamma} = \widehat{B} = 60^\circ$ ως απέναντι πλευρές του παραλληλογράμμου ΚΛΓΒ.

ΚΛΓΒ παραλληλόγραμμο διότι $ΚΛ // B\Gamma$

$\widehat{M\hat{K}L} + \widehat{K\hat{L}\Gamma} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ < 180^\circ$ οπότε τα ευθύγραμμα τμήματα ΚΜ και ΛΓ τέμνονται.

Στο τετράπλευρο ΚΛΓΜ έχουμε $ΚΛ // M\Gamma$ και τις πλευρές ΚΜ και ΛΓ να τέμνονται.

Άρα το ΚΛΓΜ είναι τραπέζιο.

Το ΛΓ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΔ, άρα $\Lambda\Gamma = \frac{AB}{2}$

Το ΚΜ ενώνει τα μέσα δύο πλευρών στο τρίγωνο ABΓ, άρα $KM = \frac{A\Gamma}{2}$

Επειδή $AB = AG$, έχουμε $LG = KM$, οπότε το τραπέζιο $ΚΛΓΜ$ είναι ισοσκελές.

ii. Τα τρίγωνα $ΜΚΛ$ και $ΑΚΛ$ έχουν:

- $ΚΛ$ κοινή πλευρά
- $\widehat{ΑΚΛ} = \widehat{ΚΜΛ} = 60^\circ$ διότι $\widehat{ΑΚΛ} = \widehat{Β} = 60^\circ$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη που σχηματίζονται από τις παράλληλες $ΚΛ$ και $ΒΔ$ που τέμνονται από την $ΑΒ$ και $\widehat{ΚΜΛ} = 60^\circ$ από το προηγούμενο ερώτημα.
- $ΑΚ = ΚΜ$, διότι $ΑΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ και $ΚΜ = \frac{ΑΓ}{2} = \frac{ΑΒ}{2}$

Σύμφωνα με το κριτήριο $\Pi - \Gamma - \Pi$ τα τρίγωνα $ΜΚΛ$ και $ΑΚΛ$ είναι ίσα, άρα:

$\widehat{ΚΜΛ} = \widehat{ΚΑΛ}$ βρίσκονται απέναντι από την κοινή πλευρά $ΚΛ$, οπότε $\widehat{ΚΜΛ} = 90^\circ$

Επομένως το τρίγωνο $ΚΜΛ$ είναι ορθογώνιο.