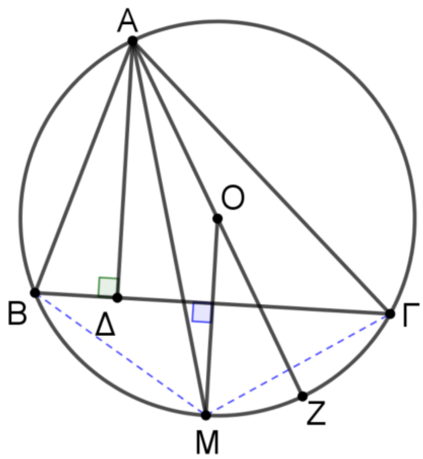

α) Επειδή το Μ είναι το μέσο του τόξου ΒΓ , τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα, άρα το ίδιο ισχύει και για τις χορδές ΒΜ και ΜΓ.

Δηλαδή το Μ ισαπέχει από τα Β και Γ, άρα είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΒΓ. Το ίδιο ισχύει και για το Ο, εφόσον ΟΒ = ΟΓ ως ακτίνες του κύκλου. Οπότε η ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΒΓ, άρα ΟΜ $\perp$ ΒΓ. Επίσης ΑΔ $\perp$ ΒΓ, άρα οι ΑΔ και ΟΜ είναι παράλληλες ως κάθετες στην ΒΓ.

Είναι $\Delta\hat{A}M = A\hat{M}O$ (1) ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΟΜ, ΑΔ, οι οποίες τέμνονται από την ΑΜ.

Επίσης οι ΟΑ και ΟΜ είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου, άρα ΟΑ = ΟΜ. Άρα το τρίγωνο ΑΟΜ είναι ισοσκελές με βάση την ΑΜ. Επομένως $M\hat{A}O = A\hat{M}O$ (2).

Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $M\hat{A}O = \Delta\hat{A}M$, άρα η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}O$.

β) Επειδή τα τόξα ΒΜ και ΜΓ είναι ίσα οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες ΒΑΜ και ΜΑΓ είναι ίσες. Από το ερώτημα (α) ισχύει $\Delta\hat{A}M = M\hat{A}O$.

Οπότε $O\hat{A}\Gamma = M\hat{A}\Gamma - M\hat{A}O = B\hat{A}M - \Delta\hat{A}M = \Delta\hat{A}B$.

γ) Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ορθογώνιο με $A\hat{\Delta}B$ ορθή. Άρα, από το άθροισμα γωνιών τριγώνου ΑΒΔ οι $B\hat{A}\Delta$ και $\hat{B}$ είναι συμπληρωματικές. Επομένως, $\Delta\hat{A}B + \hat{B} = 90^o$ (3).

Επίσης, το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο, άρα οι $\Gamma\hat{A}\Delta + \hat{\Gamma} = 90^o$.

Όμως $\Gamma\hat{A}\Delta = O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O$. Άρα $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = 90^o$ (4).

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $O\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B + \hat{B}$.

Όμως, όπως έχουμε αποδείξει στο β), $O\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}B$, άρα $\Delta\hat{A}O + \hat{\Gamma} = \hat{B}$ ή $\Delta\hat{A}O = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.