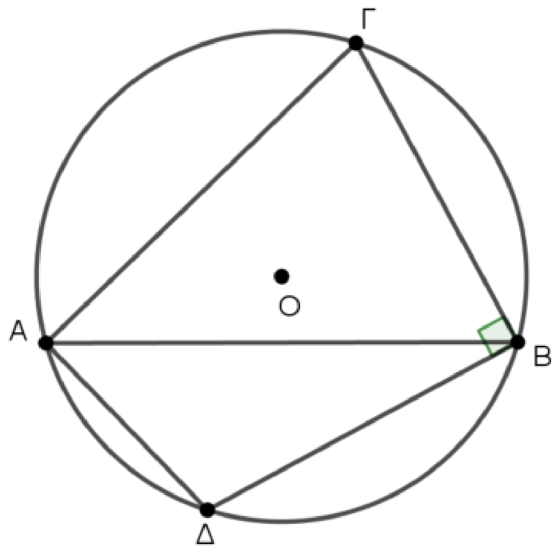


α) Στο τετράπλευρο ΑΓΒΔ, λόγω του ότι είναι εγγεγραμμένο ισχύει ότι οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές, δηλαδή:

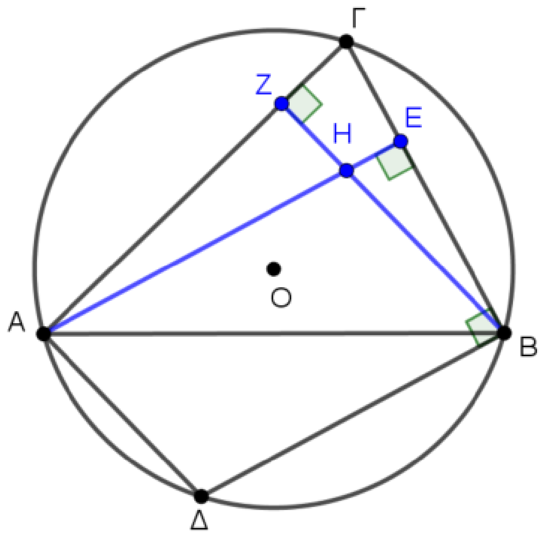
$\Delta\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{B}\Gamma = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma + 90^o = 180^o \Leftrightarrow \Delta\hat{A}\Gamma = 90^o$.

Άρα $Α\Delta \perp ΑΓ$.

β) Αν ΑΕ και ΒΖ τα ύψη του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το σημείο τομής τους Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου. Έχουμε:

- $Α\Delta \perp ΑΓ$, από το α) και $ΒΖ \perp ΑΓ$. Άρα ΑΔ // ΒΖ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΑΓ. Οπότε και ΑΔ // ΒΗ (1).
- $\Delta Β \perp ΒΓ$, από υπόθεση και $ΑΕ \perp ΒΓ$ άρα ΔΒ // ΑΕ, γιατί είναι και οι δύο κάθετες στην ΒΓ οπότε και ΔΒ // ΑΗ (2).

Από (1), (2) το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.



γ) Για την εγγεγραμμένη γωνία ΔΑΓ ισχύει $\Delta\widehat{A}\Gamma = 90^o$, άρα βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα η χορδή ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Στο τρίγωνο ΒΓΔ, το ΟΜ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΓΔ (το Ο είναι κέντρο του κύκλου και η ΓΔ διάμετρός του) και ΓΒ οπότε ισχύει $OM = \frac{B\Delta}{2}$ (3).

Επειδή το ΑΔΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, έχουμε ΒΔ = ΑΗ (4). Από (3), (4) βρίσκουμε $OM = \frac{AH}{2}$.