

GI_A_GEO_4_1706

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα.

Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

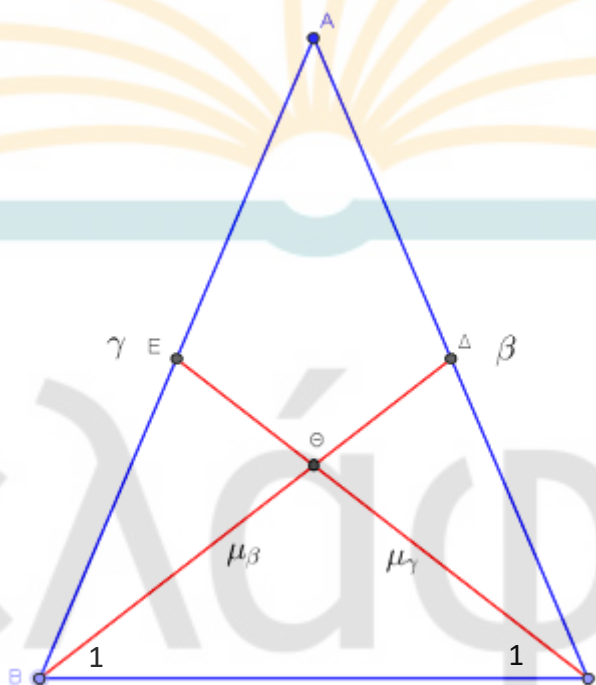
Π : Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η **αντίστροφή της** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

Λύση



α) Έστω ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$ και διαμέσους $B\Delta = \mu_\beta$ και $\Gamma E = \mu_\gamma$, τότε:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$. Έχουν:

1) $AB = A\Gamma$ (από υπόθεση)

2) \hat{A} κοινή

3) $AE = A\Delta$ (μισά των ίσων πλευρών β και γ)

Άρα είναι ίσα και έχουν : $B\Delta = \Gamma E$ ή $\mu_\beta = \mu_\gamma$, δηλαδή η πρόταση **Π** ισχύει.

β) Η αντίστροφη πρόταση της Π είναι:

Π' : Αν σε τρίγωνο ABΓ οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες, τότε το τρίγωνο ABΓ θα είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$.

Η πρόταση αυτή ισχύει αφού:

Αν οι διάμεσοι μ_β και μ_γ είναι ίσες και τέμνονται στο σημείο Θ (βαρύκεντρο του τριγώνου ABΓ), τότε θα είναι:

$$B\Theta = \frac{2}{3} \cdot \mu_\beta \text{ και } \Gamma\Theta = \frac{2}{3} \cdot \mu_\gamma, \text{ άρα και } B\Theta = \Gamma\Theta.$$

Τότε το τρίγωνο BΘΓ είναι ισοσκελές οπότε $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (1)

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα BΓΔ και BΓΕ. Έχουν:

- 1) BΓ κοινή
- 2) $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (από σχέση (1))
- 3) BΔ = ΓΕ (από υπόθεση)

Άρα είναι ίσα και έχουν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, οπότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$.

γ) Οι προτάσεις Π και Π' εκφράζονται ως ενιαία πρόταση ως εξής:

Αν ένα τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β και μ_γ είναι ίσες και αντιστρόφως.

ή
Ένα τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, αν και μόνο αν οι διάμεσοι μ_β και μ_γ είναι ίσες.

ή
Ένα τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο διάμεσους ίσες.