GI_A_GEO_4_1712

Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο, και έστω ΑΒ μια διάμετρος του, Γ το μέσο του ενός ημικυκλίου του και Δ τυχαίο σημείο του άλλου. Στην προέκταση της ΔΒ (προς το Β) θεωρούμε σημείο Ε ώστε ΒΕ=ΑΔ.

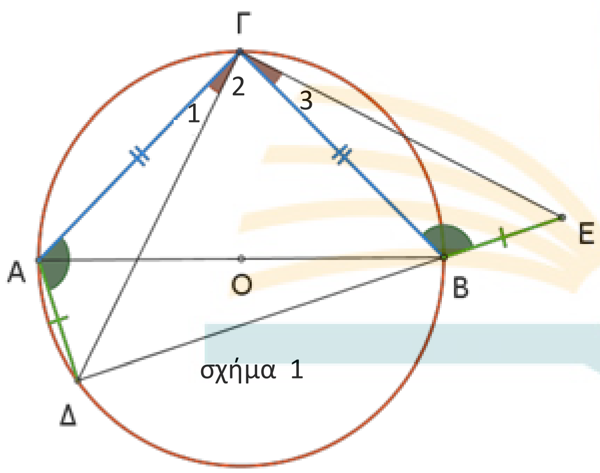
α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)

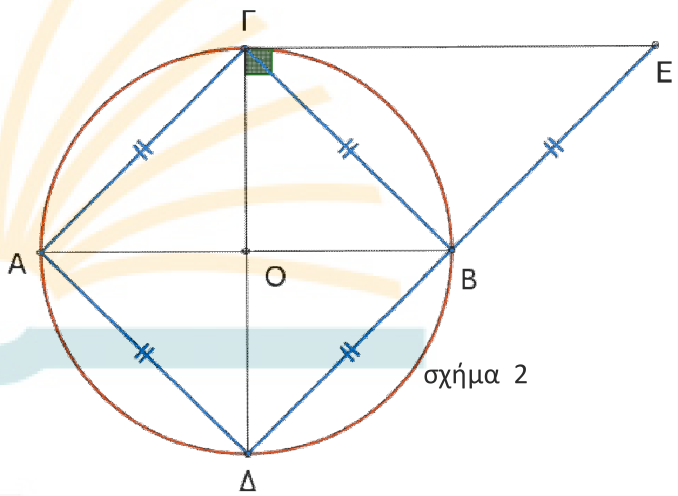
ii. Η ΓΔ είναι κάθετη στην ΓΕ. (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο Δ είναι το αντιδιαμετρικό του Γ, η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου. (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



σχήμα 1



σχήμα 2

α) i. Συγκρίνω τα $\overset{\triangle}{ΑΔΓ}$, $\overset{\triangle}{ΒΕΓ}$ (σχήμα 1).

Έχουν :

1) ΑΓ = ΒΓ ($\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$, αφου Γ μέσο του $\overset{\frown}{ΑΒ}$)

2) ΑΔ = ΒΕ (υπόθεση)

3) $Γ\hat{Α}Δ = Γ\hat{Β}Ε$ (Στο εγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΔΒΕ η $Γ\hat{Β}Ε$ είναι εξωτερική και η $Γ\hat{Α}Δ$ είναι η απέναντι εσωτερική)

Επομένως **$\overset{\triangle}{ΑΔΓ} = \overset{\triangle}{ΒΕΓ}$**.

ii. Είναι $\hat{Γ}_3 = \hat{Γ}_1$ $\left(\text{αφού } \overset{\triangle}{ΑΔΓ} = \overset{\triangle}{ΒΕΓ}\right)$, άρα $\hat{Γ}_2 + \hat{Γ}_3 = \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 \Leftrightarrow$
$\hat{Γ}_{2,3} = \hat{Γ}_{1,2} \Leftrightarrow \hat{Γ}_{2,3} = 90^0$, άρα **$ΓΔ \perp ΓΕ$**.

β) Η ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου (σχήμα 2), και $ΓΔ \perp ΓΕ$ από α΄ ερώτημα. Επομένως **η ΓΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου**.

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός