GI_A_GEO_4_1737

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) και το ύψος του ΑΗ.
Έστω Δ και Ε τα συμμετρικά σημεία του Η ως προς τις ευθείες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και τα Μ, Ν είναι τα σημεία τομής των ΑΒ, ΗΔ και ΑΓ, ΗΕ αντίστοιχα.

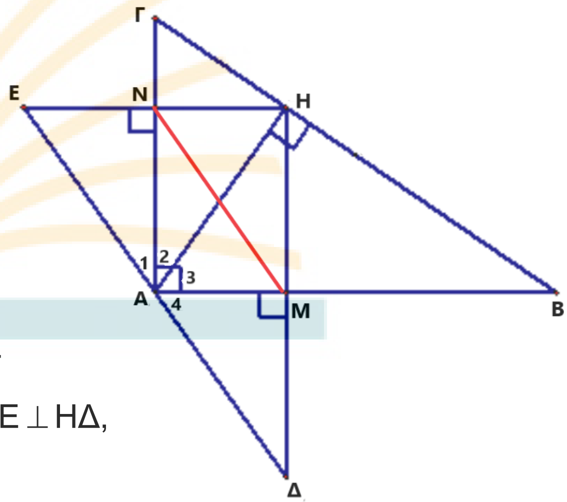
Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ (Μονάδες 10)

β) Η γωνία ΕΗΔ είναι ορθή (Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά και $MN = \dfrac{E\Delta}{2}$. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) Τα Α, Δ είναι τα συμμετρικά ως προς ΑΒ των Α, Η αντίστοιχα, άρα ΑΗ = ΑΔ.
Τα Α, Ε είναι τα συμμετρικά ως προς ΑΓ των Α, Η αντίστοιχα, άρα ΑΗ = ΑΕ.
Επομένως **ΑΗ = ΑΔ = ΑΕ**.

β) Είναι $H\Delta \perp AB$ και $A\Gamma \perp AB$, άρα ΗΔ//ΑΓ.
Τότε έχουμε $HE \perp A\Gamma$ και ΗΔ//ΑΓ, άρα $HE \perp H\Delta$,
επομένως **η $E\hat{H}\Delta$ είναι ορθή**.

γ) Λόγω συμμετρίας είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ και $\hat{A}_3 = \hat{A}_4$.

$E\hat{A}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 2\hat{A}_2 + 2\hat{A}_3 = 2(\hat{A}_2 + \hat{A}_3) = 2 \cdot 90^0 = 180^0$,
άρα τα σημεία **Ε, Α και Δ είναι συνευθειακά**.

Είναι $\begin{cases} \hat{E} = \hat{\Gamma} \text{ (συμπληρωματικές των ίσων } \hat{A}_1, \hat{A}_2 \text{ αντίστοιχα)} \\ \hat{\Delta} = \hat{B} \text{ (συμπληρωματικές των ίσων } \hat{A}_4, \hat{A}_3 \text{ αντίστοιχα)} \end{cases}$

Για να είναι $E\overset{\Delta}{H}\Delta = A\overset{\Delta}{B}\Gamma$, πρέπει ΕΔ = ΒΓ.

Στο ορθογώνιο $E\overset{\Delta}{H}\Delta$ η ΑΗ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα ΕΔ,

άρα $AH = \dfrac{E\Delta}{2}$ (1).

Το τετράπλευρο ΑΜΗΝ είναι ορθογώνιο άρα ΜΝ = ΑΗ (2).

Από (1) και (2) είναι $\mathbf{MN = \dfrac{E\Delta}{2}}$.

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός