GI_A_GEO_4_1768

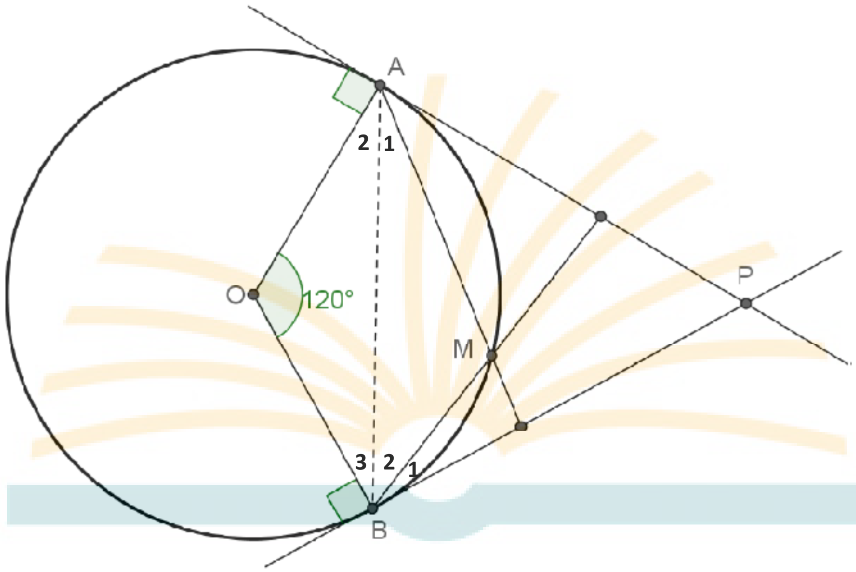
Δίνεται κύκλος (O, R) και μια επίκεντρη γωνία του AOB ίση με 120^0.
Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο σημείο P.
Θεωρούμε σημείο M του τόξου AB και φέρουμε τις χορδές AM και BM.
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο APB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) $M\hat{A}B + M\hat{B}A = 60^0$. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια θέση του M είναι $AM \perp BP$; (Μονάδες 9)

ΛΥΣΗ



α) $PA = PB$ (εφαπτόμενα τμήματα), άρα το $\overset{\Delta}{APB}$ είναι ισοσκελές

Στο $AOBP$: $\hat{A} + \hat{O} + \hat{B} + \hat{P} = 360^0 \Rightarrow 90^0 + 120^0 + 90^0 + \hat{P} = 360^0 \Leftrightarrow \hat{P} = 60^0$

Επομένως **το $\overset{\Delta}{APB}$ είναι ισόπλευρο** (ισοσκελές με μια γωνία 60^0).

β) $$M\hat{A}B + M\hat{B}A = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2} + \frac{\overset{\frown}{MA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{MB} + \overset{\frown}{MA}}{2} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{A\hat{O}B}{2} = \frac{120^0}{2} = \mathbf{60^0}$$

γ) Αν $AM \perp BP$ και αφού $OB \perp BP$ θα είναι $OB \parallel AM$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Στο ισοσκελές } \overset{\Delta}{AOB} \text{ είναι } \hat{O} = 120^0, \text{ άρα } \hat{B}_3 = \hat{A}_2 = 30^0. \\ \hat{B}_2 = \hat{A}_2 = 30^0 \text{ (εντός εναλλάξ)} \\ \hat{B}_3 = \hat{A}_1 = 30^0 \text{ (εντός εναλλάξ)} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^0$$

Είναι $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$, δηλαδή **$M$ είναι το μέσο του $\overset{\frown}{AB}$**.

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός