GI_A_GEO_4_1817

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α (Δ, Ε σημεία της ευθείας ΒΓ). Φέρουμε ΒΖ κάθετη στην ΑΔ και ΒΗ κάθετη στην ΑΕ και θεωρούμε Μ το μέσο του ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

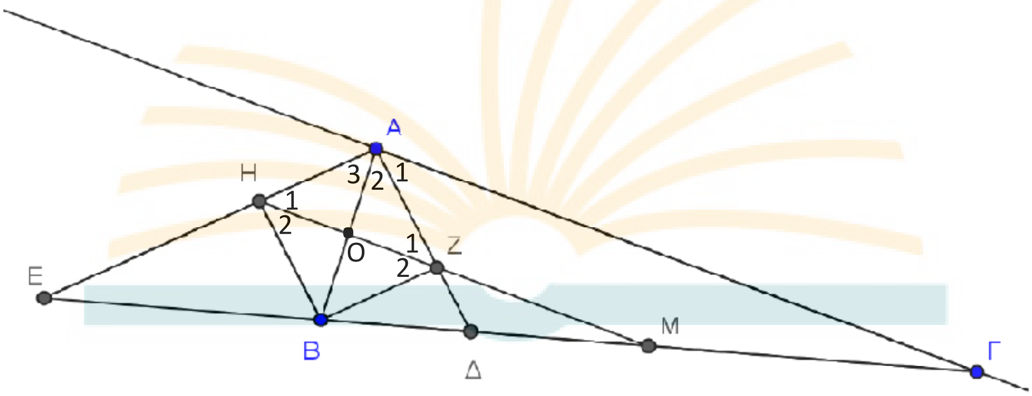
α) Το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

β) Η γωνία ΗΖΑ είναι ίση με τη γωνία ΖΑΓ. (Μονάδες 6)

γ) Η ευθεία ΗΖ διέρχεται από το Μ. (Μονάδες 6)

δ) $\mathrm{MH} = \dfrac{\mathrm{AB}+\mathrm{A\Gamma}}{2}$. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) $\mathrm{BZ} \perp \mathrm{A\Delta}$ και $\mathrm{BH} \perp \mathrm{AE}$, άρα $\hat{Z}_{1,2} = \hat{H}_{1,2} = 90^0$ (1)

ΑΔ εσωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$, άρα $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \omega$ (2)

ΑΕ εξωτερική διχοτόμος της $\hat{A}$, άρα $\hat{A}_3 = \hat{A}_4 = \varphi$ (3)

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 = 180^0 \Leftrightarrow 2\omega + 2\varphi = 180^0 \Leftrightarrow \omega + \varphi = 80^0 \Leftrightarrow \hat{A}_{2,3} = 90^0$ (4)

Από (1) και (4) είναι $\hat{Z}_{1,2} = \hat{A}_{2,3} = \hat{H}_{1,2} = 90^0$, άρα

το τετράπλευρο ΑΖΒΗ είναι ορθογώνιο.

β) Οι διαγώνιοι του ΑΖΒΗ διχοτομούνται στο Ο και είναι ίσες, άρα

το $\overset{\Delta}{\mathrm{OAZ}}$ είναι ισοσκελές με $\hat{Z}_1 = \hat{A}_2$ (5)

Από (2) και (5) είναι $\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ ή $\mathbf{H\hat{Z}A = Z\hat{A}\Gamma}$.

γ) Οι γωνίες $\hat{Z}_1$ και $\hat{A}_1$ είναι εντός εναλλάξ και ίσες, άρα ΟΖ // ΑΓ.

Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι Ο μέσο του ΑΒ και ΟΖ // ΑΓ, άρα

η ΟΖ (και κατ' επέκταση η ΗΖ) διέρχεται από το μέσο Μ του ΒΓ.

δ) Στο $\overset{\Delta}{\mathrm{AB\Gamma}}$ είναι Ο, Μ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, άρα $\mathrm{OM} = \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$ (6)

$\mathrm{MH} = \mathrm{OM} + \mathrm{OH} \overset{(6)}{=} \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} + \dfrac{\mathrm{HZ}}{2} \overset{\mathrm{HZ}=\mathrm{AB}}{=} \dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2} + \dfrac{\mathrm{AB}}{2}$, άρα $\mathbf{MH} = \dfrac{\mathbf{AB}+\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{2}}$

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός