GI_A_GEO_4_1836

Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ και τη διακεντρική ευθεία ΡΟ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ και Γ αντίστοιχα. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ τέμνει τις προεκτάσεις των ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

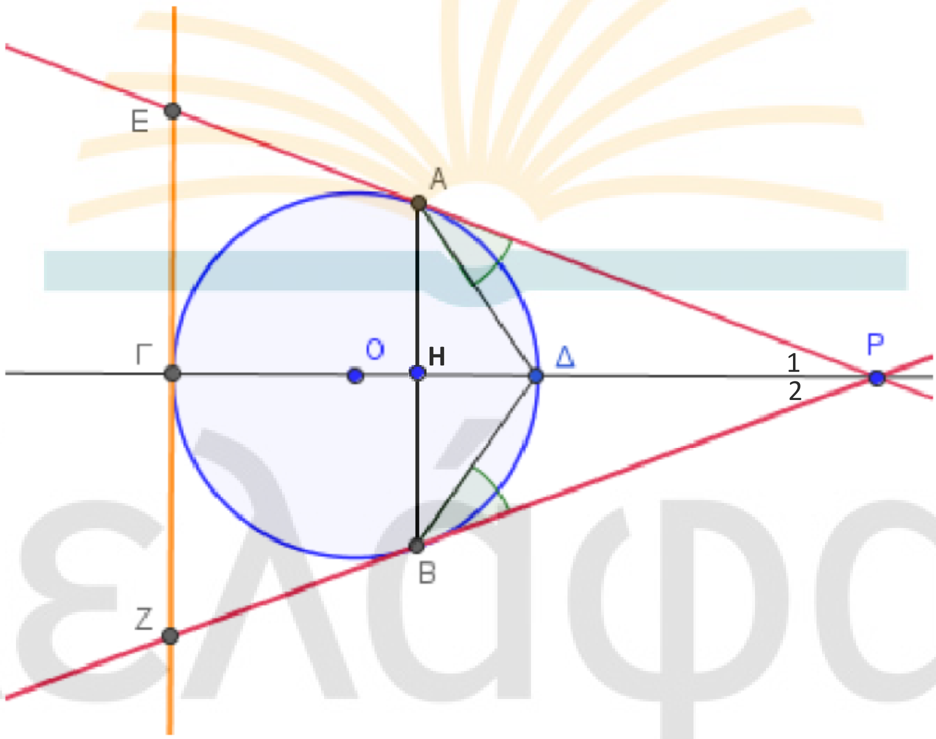
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P$ (Μονάδες 8)

β) ΕΑ=ΖΒ (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ΛΥΣΗ



α) Συγκρίνω $\overset{\triangle}{\Delta AP}$, $\overset{\triangle}{\Delta BP}$. Έχουν :

1) ΔΡ κοινή

2) ΡΑ = ΡΒ (εφαπτόμενα τμήματα από το Ρ)

3) $\hat{P}_1 = \hat{P}_2$ (η ΟΡ διχοτομεί την $A\hat{P}B$)

άρα $\overset{\triangle}{\Delta AP} = \overset{\triangle}{\Delta BP}$ και $\mathbf{\Delta\hat{A}P = \Delta\hat{B}P}$.

β) Στο $\overset{\triangle}{PEZ}$ το ΡΓ είναι διχοτόμος και ύψος, άρα το $\overset{\triangle}{PEZ}$ είναι ισοσκελές, το ΡΓ είναι και διάμεσος, δηλαδή ΕΓ = ΖΓ (1)

ΕΓ = ΕΑ (εφαπτόμενα τμήματα από το Ε) (2)

ΖΓ = ΖΒ (εφαπτόμενα τμήματα από το Ζ) (3)

Από (1), (2) και (3) έχουμε **ΕΑ = ΖΒ**.

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός

γ) Φέρνουμε το AB και έστω H το σημείο τομής με τη $P\Gamma$.

Το $\overset{\Delta}{PAB}$ είναι ισοσκελές $(PA = PB)$ και PH είναι διχοτόμος $(\hat{P}_1 = \hat{P}_2)$, άρα το PH είναι και ύψος, δηλαδή $AB \perp P\Gamma$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Είναι } AB \perp P\Gamma \text{ και } EZ \perp P\Gamma, \text{ άρα } AB \parallel EZ \\ EA \not\parallel ZB \text{ (αφού τέμνονται στο } P) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ το } ABZE \text{ είναι τραπέζιο}$$

Επιπλέον από β΄ ερώτημα έχουμε ότι $EA = BZ$, επομένως **το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο**.