GI_A_GEO_4_1855

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΒ και ΟΓ. Έστω Α το μέσον του τόξου ΒΓ. Από το Α φέρω κάθετες στις ακτίνες ΟΒ και ΟΓ που τις τέμνουν στα Δ και Ε αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των ΑΔ και ΑΕ τέμνουν τον κύκλο στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

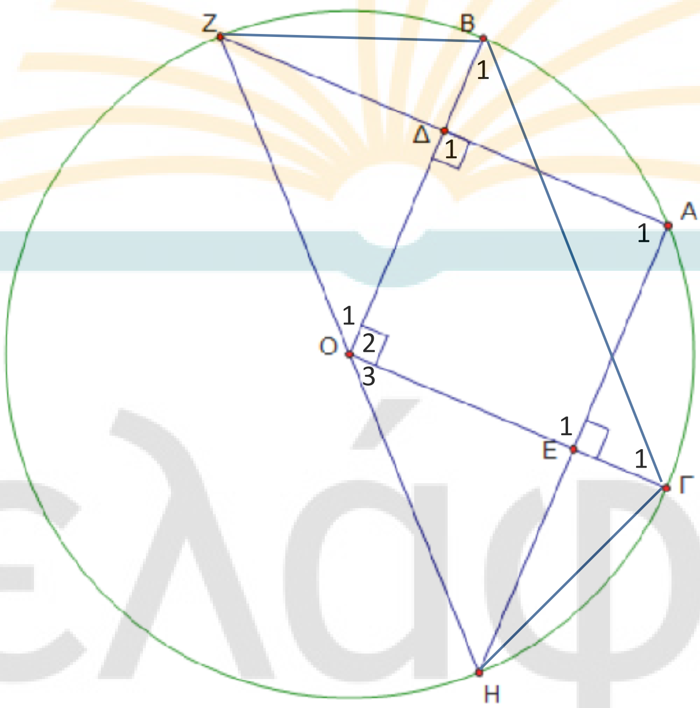
α) ΑΖ=ΑΗ . (Μονάδες 4)

β.) Το ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

γ) Τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

ΛΥΣΗ



α) $\hat{O}_2$ επίκεντρη με $\hat{O}_2 = 90^0$, άρα $\overset{\frown}{ΒΑΓ} = 90^0$

Το Α είναι μέσο του $\overset{\frown}{ΒΓ}$, άρα $\overset{\frown}{ΒΑ} = \overset{\frown}{ΑΓ} = 45^0$

Το ΟΔ απόστημα της χορδής ΑΖ, άρα Β μέσο του $\overset{\frown}{ΑΖ}$ και $\overset{\frown}{ΖΒ} = \overset{\frown}{ΒΑ} = 45^0$

Το ΟΕ απόστημα της χορδής ΑΗ, άρα Γ μέσο του $\overset{\frown}{ΑΗ}$ και $\overset{\frown}{ΓΗ} = \overset{\frown}{ΑΓ} = 45^0$

$$\left.\begin{aligned}\overset{\frown}{ΑΖ} = \overset{\frown}{ΑΒ} + \overset{\frown}{ΒΖ} = 45^0 + 45^0 = 90^0\\ \overset{\frown}{ΑΗ} = \overset{\frown}{ΑΓ} + \overset{\frown}{ΓΗ} = 45^0 + 45^0 = 90^0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{ΑΖ} = \overset{\frown}{ΑΗ},$$ άρα **ΑΖ = ΑΗ** (τόξα ίσων χορδών)

β) Στο τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι $\hat{Δ}_1 = \hat{O}_2 = \hat{E}_1 = 90^0$, άρα και $\hat{A}_1 = 90^0$ επομένως **το τετράπλευρο ΑΔΟΕ είναι ορθογώνιο** (έχει 4 ορθές γωνίες).

Επιμέλεια : **Μάνος Κοθρής** - Μαθηματικός

γ) $\overset{\frown}{ZH} = \overset{\frown}{ZB} + \overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma H} = 45^0 + 45^0 + 45^0 + 45^0 = 180^0$,
άρα η ΖΗ είναι διάμετρος του κύκλου και
τα σημεία Ζ και Η είναι αντιδιαμετρικά.

δ) Είναι $\hat{O}_2 = 90^0$ και $OB = O\Gamma = \rho$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{άρα το } \overset{\Delta}{OB\Gamma} \text{ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με } \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 45^0 \\ \text{Επίσης } \hat{O}_1 = \overset{\frown}{ZB} = 45^0\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{O}_1 = 45^0$$

- Οι γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{O}_1$ είναι εντός εναλλάξ και ίσες, άρα ΒΓ // ΖΗ
- Είναι ΒΓ < ΖΗ (η διάμετρος είναι η μεγαλύτερη χορδή)
- ΒΖ = ΓΗ (χορδές των ίσων τόξων $\overset{\frown}{BZ} = \overset{\frown}{\Gamma H}$) $\Rightarrow$

το τετράπλευρο ΒΓΗΖ είναι ισοσκελές τραπέζιο.