ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
(Άλγεβρα – Γεωμετρία - Τριγωνομετρία)
ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Σάββατο 6 Σεπτεμβρίου 1969
Άλγεβρα

Ζήτημα 1ον

§ 200. Ἰδιότης I.— Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων, ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τὸ μηδέν, ὁ δὲ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς, ἤτοι :

$$\boxed{\lambda o\gamma_\alpha 1 = 0} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1} \quad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

Πράγματι, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ὡς ἐκθέτου, ἔχομεν :

$$\alpha^0 = 1 \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^1 = \alpha \Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \alpha = 1 \quad \forall\ \alpha \in \mathbf{R}^+ - \{1\}.$$

§ 201. Ἰδιότης II.— Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου δύο (θετικῶν) ἀριθμῶν ὡς πρὸς βάσιν α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο (θετικοὶ) ἀριθμοὶ καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \Longleftrightarrow x = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \Longleftrightarrow y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2. \qquad (1)$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x \cdot \alpha^y = \theta_1 \cdot \theta_2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x+y} = \theta_1\theta_2.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\lambda o\gamma_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = x + y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 + \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$

§ 202. Ἰδιότης III.—Ὁ λογάριθμος πηλίκου δύο ἀριθμῶν (θετικῶν) ὡς πρὸς βάσιν α ($0 < \alpha \neq 1$), ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου μεῖον τὸν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου, ὡς πρὸς τὴν αὐτὴν βάσιν.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν θ_1 καὶ θ_2 δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ x, y ἀντιστοίχως οἱ λογάριθμοί των, ὡς πρὸς βάσιν α. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν τὰς λογικὰς ἰσοδυναμίας :

$$\alpha^x = \theta_1 \Longleftrightarrow x = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^y = \theta_2 \Longleftrightarrow y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

$$\alpha^x : \alpha^y = \theta_1 : \theta_2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha^{x-y} = \frac{\theta_1}{\theta_2}.$$

Ἀλλὰ ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει ὅτι :

$$\lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = x - y = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2.$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}^+$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \lambda o\gamma_\alpha \theta_1 - \lambda o\gamma_\alpha \theta_2$

§ 203. Ἰδιότης IV. – **Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε δυνάμεως ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως τῆς δυνάμεως.**

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι εἶναι $\lambda o\gamma_\alpha \theta = x$, ἔνθα $\theta \in \mathbf{R}^+$ καὶ $0 < \alpha \neq 1$. Ἐὰν θ^k, $k \in \mathbf{R}$, εἶναι μία δύναμις τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ θ, τότε, ἐπειδὴ $\theta = \alpha^x$, ἔχομεν $\theta^k = (\alpha^x)^k = \alpha^{kx}$.

Ἐκ ταύτης, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων, προκύπτει :

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot x = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta \in \mathbf{R}^+,\ k \in \mathbf{R}$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$

§ 204. Ἰδιότης V. – **Ὁ λογάριθμος οἱασδήποτε ρίζης, μὲ ὑπόρριζον θετικόν, ἰσοῦται πρὸς τὸ πηλίκον τοῦ λογαρίθμου τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.**

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ἀποτελεῖ πόρισμα τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Πράγματι, ἀρκεῖ εἰς τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα $\lambda o\gamma_\alpha \theta^k = k \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$, νὰ τεθῇ π.χ. $k = \frac{1}{\nu}$.

Λαμβάνομεν τότε :

$$\lambda o\gamma_\alpha \theta^{\frac{1}{\nu}} = \lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta.$$

Ὥστε :

$\forall\ \theta \in \mathbf{R}^+,\ \nu \in \mathbf{N}$ $0 < \alpha \neq 1$	$\Longrightarrow \lambda o\gamma_\alpha \sqrt[\nu]{\theta} = \frac{1}{\nu} \cdot \lambda o\gamma_\alpha \theta$

§ 205. Ἰδιότης VI. – **Ἐὰν ἡ βάσις α τῶν λογαρίθμων εἶναι >1, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικοὺς λογαρίθμους, ἐνῷ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους,** ἤτοι :

$$\text{Ἐὰν}\quad \alpha > 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \iff \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \iff 0 < \theta < 1 \end{cases}$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι $\lambda o\gamma_\alpha \theta > 0$· ἐκ τῆς $\alpha > 1$ προκύπτει :

$$\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} > 1^{\lambda o\gamma_\alpha \theta}$$

Ἐξ οὗ : $\theta > 1$.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $\theta > 1$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ $\alpha^{\lambda o\gamma_\alpha \theta} > 1^{\lambda o\gamma_\alpha \theta}$. Ἐξ αὐτῆς, ἐπειδὴ $\alpha > 1$, προκύπτει : $\lambda o\gamma_\alpha \theta > 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ δευτέρα ἰσοδυναμία.

§ 206. Ἰδιότης VII. – **Ἐὰν ἡ βάσις α τῶν λογαρίθμων εἶναι : $0 < \alpha < 1$, οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικοὺς λογαρίθμους, ἐνῷ οἱ θετικοὶ καὶ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικοὺς λογαρίθμους,** ἤτοι :

$$\text{Ἐὰν}\quad 0 < \alpha < 1 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda o\gamma_\alpha \theta < 0 \iff \theta > 1 \\ \lambda o\gamma_\alpha \theta > 0 \iff 0 < \theta < 1. \end{cases}$$

Ζήτημα 2ον

Η εξίσωση $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ (1)

Η (1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 = \alpha^2 - 4\beta$.

Αφού η (1) έχει πραγματικές ρίζες, θα πρέπει $\Delta_1 \geq 0$.

Η εξίσωση $\kappa^2 x^2 + \alpha\kappa(\kappa^2 + 1)x + \alpha^2\kappa^2 + \beta(\kappa^2 - 1)^2 = 0$ (2)

• Αν $\kappa \neq 0$: Η (2) έχει διακρίνουσα Δ_2, με

$$\begin{aligned}
\Delta_2 &= [\alpha\kappa(\kappa^2 + 1)]^2 - 4\kappa^2 \cdot [\alpha^2\kappa^2 + \beta(\kappa^2 - 1)^2] \\
&= \alpha^2\kappa^2(\kappa^2 + 1)^2 - 4\alpha^2\kappa^4 - 4\beta\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \\
&= \alpha^2\kappa^2(\kappa^4 + 2\kappa^2 + 1) - 4\alpha^2\kappa^4 - 4\beta\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \\
&= \alpha^2\kappa^2(\kappa^4 + 2\kappa^2 + 1 - 4\kappa^2) - 4\beta\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \\
&= \alpha^2\kappa^2(\kappa^4 - 2\kappa^2 + 1) - 4\beta\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \\
&= \alpha^2\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 - 4\beta\kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \\
&= \kappa^2(\kappa^2 - 1)^2(\alpha^2 - 4\beta) \\
&= \kappa^2(\kappa^2 - 1)^2 \cdot \Delta_1
\end{aligned}$$

Είναι $\Delta_2 \geq 0$, άρα η (2) έχει πραγματικές ρίζες.

• Αν $\kappa = 0$ η εξίσωση (2) γίνεται $0x = -\beta$.

▹ Αν $\beta = 0$ η (2) έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

▹ Αν $\beta \neq 0$ η (2) είναι αδύνατη.

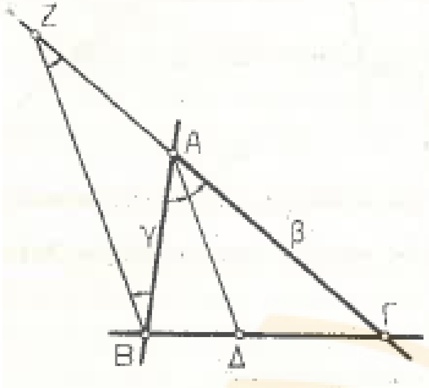
Επομένως αν η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες, τότε και η εξίσωση (2) έχει πραγματικές ρίζες, εκτός από την περίπτωση όπου $\kappa = 0$ και $\beta \neq 0$.

Γεωμετρία

Ζήτημα 1ον

11. ΘΕΩΡΗΜΑ. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α τριγώνου ΑΒΓ χωρίζουν ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς, τὴν ἀπέναντι τῆς γωνίας Α πλευρὰν αὐτοῦ εἰς τμήματα ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πρὸς αὐτὰ πλευρῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ τὸ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΒΓ σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου



Σχ. 11.1

Διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς θεωροῦμεν τὴν διὰ τῆς κορυφῆς Β τοῦ τριγώνου παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ. Ἔστω Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς παραλλήλου αὐτῆς μὲ τὴν εὐθεῖαν ΑΓ (Σχ. 11.1). Αἱ γωνίαι (ΒΑ, ΒΖ) καὶ (ΖΒ, ΖΑ) εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς (ΑΒ, ΑΔ) καὶ (ΑΔ, ΑΓ), αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι. Ἐπομένως αἱ γωνίαι (ΒΑ, ΒΖ) καὶ (ΖΒ, ΖΑ) εἶναι ἴσαι καὶ λόγῳ τούτου, θὰ εἶναι καὶ ΑΖ = ΑΒ.

Ἐπειδὴ αἱ ΑΔ καὶ ΖΒ εἶναι παράλληλοι θὰ ἔχωμεν: $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{ΖΑ}{ΑΓ}$, ἤτοι $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = \frac{γ}{β}$.

Ζήτημα 2ον

Αν ΑΔ το ύψος του κώνου, τότε ΑΔ > ρ.

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{Κ\Delta\Gamma}$:

$\Delta\Gamma^2 = \rho^2 - \alpha^2 \iff$

$\Delta\Gamma = \sqrt{\rho^2 - \alpha^2}$ (1)

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{Α\Delta\Gamma}$:

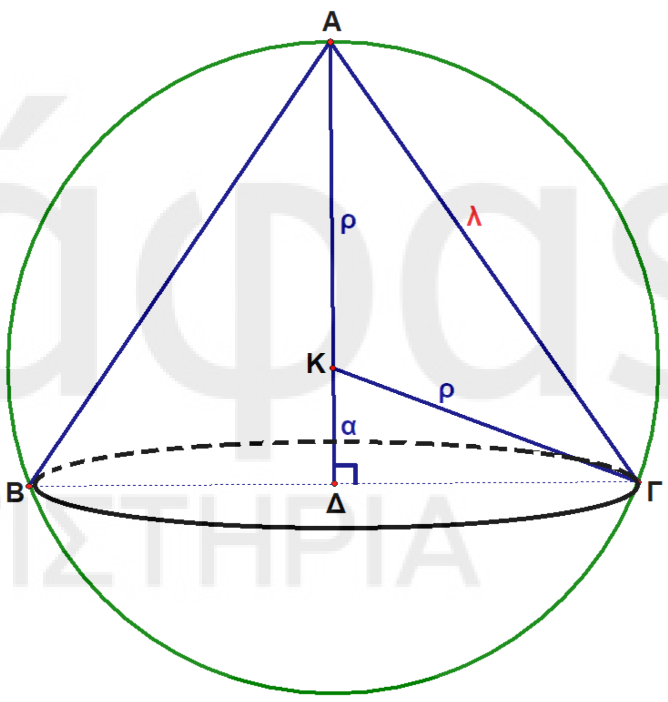
$\lambda^2 = Α\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 \overset{(1)}{\iff}$

$\lambda^2 = (\rho + \alpha)^2 + \rho^2 - \alpha^2 \iff$

$\lambda^2 = \rho^2 + 2\alpha\rho + \cancel{\alpha^2} + \rho^2 \cancel{-\alpha^2} \iff$

$\lambda^2 = 2\rho(\rho + \alpha) \iff$

$\lambda = \sqrt{2\rho(\rho + \alpha)}$ (2)



$$
\begin{aligned}
E_\kappa &= \pi \cdot \Delta\Gamma \cdot \lambda \\
&\underset{(2)}{\overset{(1)}{=}} \pi \cdot \sqrt{\rho^2 - \alpha^2} \cdot \sqrt{2\rho(\rho + \alpha)} \\
&= \pi \cdot \sqrt{(\rho - \alpha)(\rho + \alpha) \cdot 2\rho(\rho + \alpha)} \\
&= \pi \cdot \sqrt{2\rho(\rho - \alpha)(\rho + \alpha)^2} \\
&= \pi \cdot (\rho + \alpha) \cdot \sqrt{2\rho(\rho - \alpha)}
\end{aligned}
$$

Τριγωνομετρία

Ζήτημα 1ο

§ 49. *Πρόβλημα IV. Νὰ εὑρεθῶσιν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς ὀξείας γωνίας ω, ἂν γνωρίζωμεν τὴν σφω.*

Λύσις. Α΄) Εὕρεσις τοῦ συνω καὶ τοῦ ἡμω. Δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν, ὡς προηγουμένως λύοντες τὸ σύστημα

$$ἡμ^2ω + συν^2ω = 1,\ σφω = \frac{συνω}{ἡμω}.$$

Ἀφήνομεν διὰ τοὺς μαθητὰς τὴν ἀποπεράτωσιν τῆς ἐργασίας ταύτης καὶ ὑποδεικνύομεν τὴν ἑξῆς ἀκόμη μέθοδον.

$ἐφω = \frac{1}{σφω}$. Ἕνεκα ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι ἡ

$$συν^2ω = \frac{1}{1+ἐφ^2ω} \quad \text{γίνεται : } συν^2ω = \frac{1}{1+\frac{1}{σφ^2ω}} = \frac{σφ^2ω}{1+σφ^2ω},$$

ὅθεν $$συνω = \frac{σφω}{\sqrt{1+σφ^2ω}} \qquad ἡμ^2ω = \frac{ἐφ^2ω}{1+ἐφ^2ω}$$

Ὁμοίως ἡ $$ἡμ^2ω = \frac{ἐφ^2ω}{1+ἐφ^2ω} \quad \text{γίνεται : } ἡμ^2ω = \frac{\frac{1}{σφ^2ω}}{1+\frac{1}{σφ^2ω}} = \frac{1}{1+σφ^2ω}$$

καὶ ἐπομένως $$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+σφ^2ω}}$$

Β΄) Εὕρεσις τῆς ἐφω. Ταύτην εὑρίσκομεν ἀμέσως ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $ἐφω = \frac{1}{σφω}$.

Ζήτημα 2ο

Για $α \neq 180^0 \cdot κ$ και $β \neq 180^0 \cdot κ$, με $κ \in Z$:

$$
\begin{aligned}
σφ^2α - σφ^2β &= \frac{συν^2α}{ημ^2α} - \frac{συν^2β}{ημ^2β} \\
&= \frac{ημ^2β \cdot συν^2α - ημ^2α \cdot συν^2β}{ημ^2α \cdot ημ^2β} \\
&= \frac{ημ^2β \cdot (1 - ημ^2α) - ημ^2α \cdot (1 - ημ^2β)}{ημ^2α \cdot ημ^2β} \\
&= \frac{ημ^2β \cancel{- ημ^2α \cdot ημ^2β} - ημ^2α \cancel{+ ημ^2α \cdot ημ^2β}}{ημ^2α \cdot ημ^2β} \\
&= \frac{ημ^2β - ημ^2α}{ημ^2α \cdot ημ^2β}
\end{aligned}
$$