# ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ
# ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
# Πέμπτη 18 Σεπτεμβρίου 1969

## Ζήτημα 1$^o$

**α)** **§ 25. Καρτεσιανὸν γινόμενον συνόλων.** — Ἂς θεωρήσωμεν δύο μὴ κενὰ σύνολα A καὶ B, ὑποσύνολα ἑνὸς βασικοῦ συνόλου Ω. Ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ σύνολα σχηματίζεται (ὁρίζεται) ἓν νέον σύνολον, τὸ ὁποῖον καλεῖται *καρτεσιανὸν γινόμενον μὲ πρῶτον παράγοντα τὸ A καὶ δεύτερον τὸ B* καὶ συμβολίζεται μὲ A × B· τὸ νέον τοῦτο σύνολον ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$\boxed{\mathbf{A \times B \equiv \{(\alpha, \beta) : \ \forall \alpha \in A \ \ \text{καὶ} \ \ \forall \beta \in B\}}}$$

Τὸ στοιχεῖον $(\alpha,\beta) \in A \times B$ καλεῖται *ἓν διατεταγμένον ζεῦγος*· ὅθεν τὸ $A \times B$ ὁρίζεται ὡς τὸ σύνολον πάντων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν $(\alpha,\beta)$, μὲ $\alpha \in A$ καὶ $\beta \in B$.

**β)** $(x, y) \in A \times (B \cup \Gamma) \iff$

$x \in A$ και $y \in (B \cup \Gamma) \iff$

$x \in A$ και $(y \in B$ ή $y \in \Gamma) \iff$

$(x \in A$ και $y \in B)$ ή $(x \in A$ και $y \in \Gamma) \iff$

$(x, y) \in A \times B$ ή $(x, y) \in A \times \Gamma \iff$

$(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

Επομένως $\mathbf{A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)}$

## Ζήτημα 2$^o$

**α)** Ο διαιρέτης $(x - \alpha)\cdot(x - \beta)$ είναι δευτέρου βαθμού, άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης $\sigma(x) : (x - \alpha)\cdot(x - \beta)$ είναι της μορφής $\upsilon(x) = \kappa x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

$\sigma(x) = (x - \alpha)\cdot(x - \beta)\cdot\Pi(x) + \kappa x + \lambda, \ x \in \mathbb{R}$ (1)

$(1) \overset{x=\alpha}{\Rightarrow} \sigma(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda$ (2)

$(1) \overset{x=\beta}{\Rightarrow} \sigma(\beta) = \kappa\beta + \lambda$ (3)

$(2), (3) \overset{(-)}{\Rightarrow} \sigma(\alpha) - \sigma(\beta) = \kappa\alpha - \kappa\beta \overset{\alpha\neq\beta}{\iff} \kappa = \dfrac{\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)}{\alpha - \beta}$ (4)

$(2) \overset{(4)}{\Rightarrow} \lambda + \beta\cdot\dfrac{\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)}{\alpha - \beta} = \sigma(\beta) \iff$

$\lambda\cdot(\alpha - \beta) + \beta\cdot\sigma(\alpha) \cancel{- \beta\cdot\sigma(\beta)} = \alpha\cdot\sigma(\beta) \cancel{- \beta\cdot\sigma(\beta)} \iff$

$\lambda\cdot(\alpha - \beta) = \alpha\cdot\sigma(\beta) - \beta\cdot\sigma(\alpha) \iff \lambda = \dfrac{\alpha\cdot\sigma(\beta) - \beta\cdot\sigma(\alpha)}{\alpha - \beta}$ (5)

$(4), (5) \Rightarrow \mathbf{\upsilon(x) = \dfrac{\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)}{\alpha - \beta}\cdot x + \dfrac{\alpha\cdot\sigma(\beta) - \beta\cdot\sigma(\alpha)}{\alpha - \beta}}$

**β)** Αν $\alpha = \beta$, τότε ο διαιρέτης είναι της μορφής $(x - \alpha)^2$.

Ο διαιρέτης είναι δευτέρου βαθμού, άρα το υπόλοιπο είναι πρώτου βαθμού.

Αν $\Pi_1(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $\sigma(x) : (x - \alpha)$, τότε :

$\sigma(x) = (x - \alpha)\cdot\Pi_1(x) + \sigma(\alpha)$ (1) και

αν $\Pi_2(x)$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης $\Pi_1(x) : (x - \alpha)$, τότε :

$\Pi_1(x) = (x - \alpha)\cdot\Pi_2(x) + \Pi_1(\alpha)$ (2)

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \sigma(x) = (x - \alpha)\cdot\left[(x - \alpha)\cdot\Pi_2(x) + \Pi_1(\alpha)\right] + \sigma(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\sigma(x) = (x - \alpha)^2\cdot\Pi_2(x) + (x - \alpha)\cdot\Pi_1(\alpha) + \sigma(\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\sigma(x) = (x - \alpha)^2\cdot\Pi_2(x) + \underbrace{\Pi_1(\alpha)\cdot x - \alpha\cdot\Pi_1(\alpha) + \sigma(\alpha)}_{\upsilon(x)}$$

Επομένως $\boldsymbol{\upsilon(x) = \Pi_1(\alpha)\cdot x - \alpha\cdot\Pi_1(\alpha) + \sigma(\alpha)}$.

**Ζήτημα 3°**

Είναι $\varphi(0) \geq 0 \Leftrightarrow \gamma - \alpha \geq 0 \Rightarrow \gamma \geq \alpha > 0$.

Επίσης $\Delta = \beta^2 - 4\cdot 2\alpha\cdot(\gamma - \alpha) = \beta^2 - 8\alpha\gamma + 8\alpha^2$

- Αν οι ρίζες του $\varphi(x)$ είναι μιγαδικές ή πραγματικές και ίσες, τότε $\Delta \leq 0$

**1η λύση**

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 8\alpha\gamma + 8\alpha^2 \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 \leq 8\alpha\gamma - 8\alpha^2$ (1)

Θα αποδείξουμε ότι $\alpha - 6\beta + 8\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \alpha + 8\gamma \geq 6\beta \underset{\text{θετικά}}{\overset{\text{μέλη}}{\Leftrightarrow}}$

$(\alpha + 8\gamma)^2 \geq (6\beta)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 16\alpha\gamma + 64\alpha^2 \geq 36\beta^2$

Με τη βοήθεια της (1) αρκεί να δείξουμε ότι :

$\alpha^2 + 16\alpha\gamma + 64\alpha^2 \geq 36\cdot(8\alpha\gamma - 8\alpha^2) \Leftrightarrow$

$\alpha^2 + 16\alpha\gamma + 64\alpha^2 \geq 288\alpha\gamma - 288\alpha^2 \Leftrightarrow$

$289\alpha^2 - 272\alpha\gamma + 64\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(17\alpha - 8\gamma)^2 \geq 0$ που ισχύει.

Επομένως $\boldsymbol{\alpha - 6\beta + 8\gamma \geq 0}$.

**2η λύση**

Είναι $(\beta - 3\alpha)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 6\alpha\beta + 9\alpha^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{\beta^2 - 8\alpha\gamma + 8\alpha^2}_{\Delta} + \alpha^2 - 6\alpha\beta + 8\alpha\gamma \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Delta + \alpha\cdot(\alpha - 6\beta + 8\gamma) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha\cdot(\alpha - 6\beta + 8\gamma) \geq -\Delta \overset{\alpha > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\alpha - 6\beta + 8\gamma \geq -\frac{\Delta}{\alpha} \underset{\Delta \leq 0}{\overset{\alpha > 0}{\Rightarrow}} \boldsymbol{\alpha - 6\beta + 8\gamma \geq 0}.$$

• Αν οι ρίζες του $\varphi(x)$ είναι πραγματικές και άνισες ($\rho_1$ και $\rho_2$) :
Είναι $\varphi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [-1, 1]$, άρα καμία από τις $\rho_1$, $\rho_2$ δεν βρίσκονται στο ανοικτό διάστημα $(-1, 1)$, δηλαδή
$\rho_1, \rho_2 \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ (2)

$$\left.\begin{array}{l} \rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} < 0 \\ \rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma - \alpha}{2\alpha} > 0 \end{array}\right\} \overset{(2)}{\Rightarrow} \rho_1, \rho_2 \in (-\infty, -1]$$

Επομένως $\boldsymbol{\rho_1 = -1 - \varepsilon_1}$ **και** $\boldsymbol{\rho_2 = -1 - \varepsilon_2}$, **με** $\boldsymbol{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0}$ **και** $\boldsymbol{\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2}$.

▹ $\rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow -2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \dfrac{-\beta}{2\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{\beta}{2\alpha} = 2 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \overset{\alpha > 0}{\Rightarrow}$
$\beta = 4\alpha + 2\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2$ (3)

▹ $\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma - \alpha}{2\alpha} \Leftrightarrow (-1 - \varepsilon_1) \cdot (-1 - \varepsilon_2) = \dfrac{\gamma - \alpha}{2\alpha} \Leftrightarrow$
$1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = \dfrac{\gamma - \alpha}{2\alpha} \overset{\alpha > 0}{\Rightarrow}$
$\gamma - \alpha = 2\alpha + 2\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 \Leftrightarrow$
$\gamma = 3\alpha + 2\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2$ (4)

$$\begin{aligned} \alpha - 6\beta + 8\gamma &\overset{(3)}{\underset{(4)}{=}} \alpha - 6 \cdot (4\alpha + 2\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2) + 8 \cdot (3\alpha + 2\alpha\varepsilon_1 + 2\alpha\varepsilon_2 + 2\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2) \\ &= \alpha \cancel{- 24\alpha} - 12\alpha\varepsilon_1 - 12\alpha\varepsilon_2 \cancel{+ 24\alpha} + 16\alpha\varepsilon_1 + 16\alpha\varepsilon_2 + 16\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \alpha + 4\alpha\varepsilon_1 + 4\alpha\varepsilon_2 + 16\alpha\varepsilon_1\varepsilon_2 \\ &= \alpha \cdot (1 + 4\varepsilon_1) + 4\alpha\varepsilon_2 \cdot (1 + 4\varepsilon_1) \\ &= \alpha \cdot (1 + 4\varepsilon_1) \cdot (1 + 4\varepsilon_2) \end{aligned}$$

Είναι $\boldsymbol{\alpha - 6\beta + 8\gamma > 0}$, διότι $\alpha > 0$, $1 + 4\varepsilon_1 > 0$ και $1 + 4\varepsilon_2 > 0$.