ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969

Θέματα Άλγεβρας

(ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Πέμπτη 18 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1^{ον} (Θεωρία)

α) Τι καλείται καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων;
β) Να αποδειχθή η ισότης : $A\text{x}(B \cup \Gamma) = (A\text{x}B)\cup(A\text{x}\Gamma)$.

Ζήτημα 2^{ον}

Να ευρεθή το υπόλοιπον της διαιρέσεως του πολυωνύμου $\sigma(x)$ διά του πολυωνύμου $(x - \alpha)(x - \beta)$ όταν :
α) $\alpha \neq \beta$,
β) $\alpha = \beta$.
Δίδεται ότι οι συντελεσταί του $\sigma(x)$ καθώς και οι α και β είναι πραγματικοί αριθμοί.

Ζήτημα 3^{ον}

Δίδεται το πολυώνυμον $\varphi(x) = 2\alpha x^2 + \beta x + \gamma - \alpha$, ένθα α, β, γ πραγματικοί και $\alpha > 0$, $\beta > 0$, το οποίον εξ' υποθέσεως λαμβάνει τιμάς όχι αρνητικάς δια κάθε τιμήν του x εκ του κλειστού διαστήματος $-1 \leq x \leq 1$.
Αποδείξατε ότι $\alpha - 6\beta + 8\gamma \geq 0$, όταν αι ρίζαι του $\varphi(x)$ είναι φανταστικαί ή πραγματικαί και ίσαι.
Επίσης αποδείξατε την σχέσιν $\alpha - 6\beta + 8\gamma > 0$, όταν αι ρίζαι του $\varphi(x)$ είναι πραγματικαί και άνισοι.
Διά την τελευταίαν περίπτωσιν αποδείξατε προηγουμένως ότι αι ρίζαι ρ_1 και ρ_2 του $\varphi(x)$ δύνανται να τεθούν υπό την μορφήν $\rho_1 = -1 - \varepsilon_1$ και $\rho_2 = -1 - \varepsilon_2$, όπου ε_1 και ε_2 κατάλληλοι όχι αρνητικοί αριθμοί και ένας τουλάχιστον εξ' αυτών διάφορος του μηδενός.