ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ (ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)
Τρίτη 2 Σεπτεμβρίου 1969

Ζήτημα 1ο

67. ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΔΥΟ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ.

α) Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\mathrm{A}): \left.\begin{matrix} (1): \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ (2): \alpha' x+\beta'\psi=\gamma' \end{matrix}\right\}$$

Τὴν ἀνωτέρω μορφὴν δύναται νὰ λάβῃ κάθε σύστημα πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Τὰ α, β, γ, α′, β′, γ′ συμβολίζουν δεδομένους πραγματικοὺς ἀριθμούς, τὰ δὲ x, ψ τοὺς ἀγνώστους.

I. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ,α′,β′,γ′ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκομεν :

$x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ x μὲ τὸ ἴσον του εἰς τὴν (2) τοῦ (A) ἔχομεν τὴν $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma$.

Ὥστε εἶναι :

$$(\mathrm{A})\ \left\{\begin{matrix} \alpha x+\beta\psi=\gamma \\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma' \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha} \\ (\alpha\beta'-\alpha'\beta)\psi=\alpha\gamma'-\alpha'\gamma \end{matrix}\right\} \begin{matrix}(3)\\(4)\end{matrix}\quad (\mathrm{B})$$

Εἰς τὸ (B) ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον. Ἐὰν λοιπὸν ἡ (4) εἶναι δυνατή, ἀδύνατος ἢ ἀόριστος, θὰ εἶναι καὶ τὸ σύστημα (B), ἄρα καὶ τὸ ἰσοδύναμόν του (A), δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον ἀντιστοίχως.

1ον. Δυνατὴ εἶναι ἡ (4) ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$. **Ἑπομένως τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸν ὅταν καὶ μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν : $\psi=\frac{\alpha\gamma'-\alpha'\gamma}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Ἐὰν θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ εἰς τὴν (3), εὑρίσκομεν $x=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}$. Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\beta}{\beta'}$ (i)

2ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ἀδύνατος. Δὲν ὑπάρχει τιμὴ τοῦ ψ λύσις τῆς (4). Ὥστε καὶ ἀπὸ τὴν (3) δὲν θὰ ὑπάρχῃ λύσις της ὡς πρὸς x καὶ τὸ σύστημα (A) **εἶναι ἀδύνατον.**

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν : $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0\Leftrightarrow\alpha\beta'=\alpha'\beta\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha'}=$ $=\frac{\beta}{\beta'}$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma\neq 0\Leftrightarrow\alpha\gamma'\neq\alpha'\gamma\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$, ἑπομένως εἶναι καί : $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}\neq\frac{\gamma}{\gamma'}$. (ii)

Ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\rho$ θὰ ἔχωμεν $\alpha=\alpha'\rho$, $\beta=\beta'\rho$ καὶ $\gamma\neq\gamma'\rho$, ὡς ἐξάγεται ἀπὸ τὰς (ii). Ἡ ἐξίσωσις (1) τοῦ (A) γίνεται : $\rho(\alpha' x+\beta'\psi)=\gamma$ καὶ τὸ σύστημα (A) γράφεται : $\left.\begin{matrix}\rho(\alpha' x+\beta'\psi)=\gamma\\ \alpha' x+\beta'\psi=\gamma'\end{matrix}\right\}$. Αἱ ἐξισώσεις αὐταὶ εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀληθεύουν συγχρόνως, διότι εἶναι $\rho\gamma'\neq\gamma$. Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅτι αἱ ἐξισώσεις **εἶναι ἀσυμβίβαστοι.**

3ον. Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0$ ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται ἀόριστος. Τὸ ψ δύναται νὰ λάβῃ κάθε τιμὴν εἰς τὸ R. Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ ψ ἀντιστοιχίζεται διὰ τῆς (3) τοῦ συστήματος (B) μία μόνον τιμὴ τοῦ x. Τὸ σύστημα λοιπὸν (B), ἄρα καὶ τὸ (A) **ἔχει μίαν ἀπειρίαν λύσεων.** Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχομεν :

$$\alpha\beta'-\alpha'\beta=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'} \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma'-\alpha'\gamma=0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\gamma}{\gamma'},$$

δηλαδὴ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, (iii)

Ἐὰν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τοῦ (A) ἰσχύῃ ἡ (iii), τότε τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀόριστον. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\frac{\alpha}{\alpha'}=\rho$, ἀπὸ τὰς (iii) ἔχομεν $\alpha=\alpha'\rho$, $\beta=\beta'\rho$ καὶ $\gamma=\gamma'\rho$ καὶ αἱ ἐξισώσεις τοῦ (A) γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} \rho(\alpha' x + \beta' \psi) &= \rho\gamma' \\ \alpha' x + \beta' \psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ αἱ ὁποῖαι συμπίπτουν εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν,

ἐπειδὴ εἶναι $\rho \neq 0$. Ἀλλὰ μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ψ ἔχει ἀπείρους λύσεις (x, ψ) εἰς τὸ σύνολον R x R.

II. Ἐὰν εἶναι οἱ $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \neq 0$ καὶ $\gamma = \gamma' = 0$. Ἐπειδὴ αἱ (3) καὶ (4) ἰσχύουν, εὑρίσκομεν ἀπὸ τὴν (4) ὅτι εἶναι $\psi = 0$ καὶ ἀπὸ τὴν (3) $x = 0$, ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' \neq \alpha'\beta$, δηλαδὴ τὸ σύστημα (A) εἶναι δυνατὸν καὶ ἔχει μίαν λύσιν τὴν $x = 0$, $\psi = 0$.

Ἐὰν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, δηλ. $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = \dfrac{\beta}{\beta'}$, τὸ (A) εἶναι ἀόριστον σύστημα.

III. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \beta = 0$, τότε τὸ σύστημα (A) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \gamma \\ \alpha' x + \beta' \psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$, τὸ (A) περιορίζεται εἰς μίαν μόνον

ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha' x + \beta' \psi = \gamma'$, καὶ ἔχει ἀπείρους λύσεις. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\gamma \neq 0$, τὸ σύστημα (A) εἶναι ἀδύνατον.

Τὰ αὐτὰ συμπεράσματα ἔχομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $\alpha' = \beta' = 0$.

IV. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = 0$, ἐξαφανίζεται ὁ ἕνας ἄγνωστος καὶ τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} \beta\psi &= \gamma \\ \beta'\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\} \quad (\Gamma)$$

Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) ἔχει τὴν λύσιν:

$x \in R$ (δηλαδὴ $x =$ ὁποιοσδήποτε ἀριθμὸς πραγματικὸς)

$\psi = \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, ἐπομένως εἶναι ἀόριστον.

Ἐὰν εἶναι $\dfrac{\gamma}{\beta} \neq \dfrac{\gamma'}{\beta'}$, τὸ (Γ) εἶναι ἀδύνατον.

V. Ἐὰν εἶναι $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$, τὸ σύστημα (A) γίνεται:

$$\left.\begin{aligned} 0x + 0\psi &= \gamma \\ 0x + 0\psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$$ Ἐὰν εἶναι $\gamma = 0$ καὶ $\gamma' = 0$ ἔχομεν δύο ταυτότητας.

Τὰ x, ψ λαμβάνουν καὶ τὰ δύο αὐθαιρέτους τιμὰς καὶ λέγομεν τώρα ὅτι τὸ (A) ἔχει **διπλῆν ἀοριστίαν** λύσεων.

Ἐὰν ἕνα ἀπὸ τὰ γ καὶ γ′ δὲν εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα **εἶναι ἀδύνατον.**

Ἡ περίπτωσις $\alpha = \alpha' = \beta = \beta' = 0$ δύναται νὰ παρουσιασθῇ κατὰ τὴν μελέτην **παραμετρικῶν** συστημάτων. Π.χ. εἰς τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda + 1)\,x + (\lambda^2 - 1)\,\psi &= 24 \\ (\lambda^3 + 1)\,x - (\lambda + 1)\,\psi &= 17 \end{aligned}\right\} \quad \text{διὰ } \lambda = -1.$$

Συμπέρασμα. Τὸ σύστημα $\left.\begin{aligned} \alpha x + \beta\psi &= \gamma \\ \alpha' x + \beta' \psi &= \gamma' \end{aligned}\right\}$ ἔχει μίαν λύσιν καὶ μόνον μίαν,

τὴν $x = \dfrac{\gamma\beta' - \gamma'\beta}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, $\psi = \dfrac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$, ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καὶ $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.

Ζήτημα 2°

> Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $\nu = 2\kappa + 1$, $(\kappa \in N)$, τότε $\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Έστω $1, x_1, x_2, x_3, ..., x_{2\nu}, \alpha$ οι όροι της σχηματιζόμενης γεωμετρικής προόδου.
Το πλήθος των όρων είναι $2\nu + 2$ και αν λ είναι ο λόγος της προόδου, τότε
$\alpha = \lambda^{2\nu+1} \Rightarrow \lambda = \sqrt[2\nu+1]{\alpha}$

Η πρόοδος γράφεται : $1, \sqrt[2\nu+1]{\alpha}, \sqrt[2\nu+1]{\alpha^2}, \sqrt[2\nu+1]{\alpha^3}, ..., \sqrt[2\nu+1]{\alpha^{2\nu}}, \alpha$.

Το άθροισμα των παρεμβαλλομένων όρων της είναι :

$$S = \sqrt[2\nu+1]{\alpha} + \sqrt[2\nu+1]{\alpha^2} + \sqrt[2\nu+1]{\alpha^3} + ... + \sqrt[2\nu+1]{\alpha^{2\nu}}$$

$$= \frac{\sqrt[2\nu+1]{\alpha}\cdot\left(\sqrt[2\nu+1]{\alpha^{2\nu}} - 1\right)}{\sqrt[2\nu+1]{\alpha} - 1} = \frac{\alpha - \sqrt[2\nu+1]{\alpha}}{\sqrt[2\nu+1]{\alpha} - 1}$$

Για $\alpha = -\frac{1}{32}$ και $\nu = 2$, είναι $\sqrt[2\nu+1]{\alpha} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\sqrt[5]{\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$

και $S = \dfrac{-\frac{1}{32} + \frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} - 1} = \dfrac{\frac{15}{32}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{30}{96} = -\frac{5}{16}$

Ζήτημα 3°

> Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν τεθέντων ὁρισμῶν, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς φανταστικός.
>
> Πράγματι: $\forall \alpha \in R^- : \sqrt{\alpha} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{|\alpha|} \wedge \sqrt{-1} = \pm i \Rightarrow \boxed{\sqrt{\alpha} = \pm i\sqrt{|\alpha|}}$

Θέτουμε $x^2 = y$. Η επιλύουσα της εξίσωσης είναι $y^2 - 2(\alpha + \beta)y + (\alpha - \beta)^2 = 0$.

$$\Delta = [-2(\alpha + \beta)]^2 - 4(\alpha - \beta)^2 = 4(\alpha + \beta)^2 - 4(\alpha - \beta)^2 = 4[(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2]$$

$$= 4(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2) = 4\cdot 4\alpha\beta = 16\alpha\beta$$

$$y = \frac{2(\alpha + \beta) \pm \sqrt{16\alpha\beta}}{2} = \frac{2(\alpha + \beta) \pm 4\sqrt{\alpha\beta}}{2} = \alpha + \beta \pm 2\sqrt{\alpha\beta}$$

$$= \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 \pm 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \left(\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}\right)^2$$

Είναι $x^2 = \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2$ ή $x^2 = \left(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}\right)^2$, άρα

$x = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ή $x = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$ ή $x = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ή $x = -\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}$.