

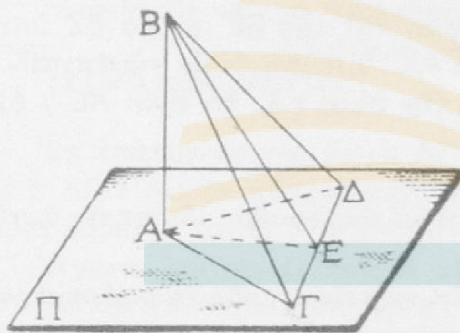
ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970 ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ (ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ)

Τρίτη 8 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1^ο

Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ.Νικολάου (εκδ.1965) σελίδα 252

§ 284. *Θεώρημα I.* Εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ ΓΔ εἶναι τυχούσα εὐθεῖα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ποδὸς Α ἄγεται εὐθεῖα ΑΕ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ καὶ τέμνουσα αὐτὴν εἰς τὸ Ε. Ἄν Β εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς AB, ἡ BE εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ (σχ. 207).



Σχ. 207

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς ΓΔ ὀρίζομεν δύο ἴσα τμήματα ΕΓ, ΕΔ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθεῖας ΒΓ, ΒΔ, ΑΓ, ΑΔ. Τὸ τμήμα λοιπὸν ΓΔ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς ΑΕ καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $ΑΓ = ΑΔ$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $ΒΓ = ΒΔ$, ἡ δὲ διάμεσος ΒΕ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, ὁ.ξ.δ.

Ζήτημα 2^ο

α) • 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\triangle A\Gamma\Delta$: $ΑΓ^2 + ΑΔ^2 = 2ΑΛ^2 + \frac{ΓΔ^2}{2}$ (1)

• 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\triangle B\Gamma\Delta$: $ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2ΒΛ^2 + \frac{ΓΔ^2}{2}$ (2)

• 1^ο θεώρημα διαμέσων στο $\triangle ABL$: $ΑΛ^2 + ΒΛ^2 = 2ΚΛ^2 + \frac{ΑΒ^2}{2}$ (3)

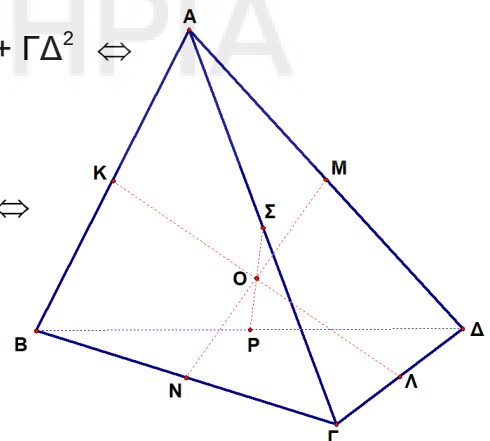
(1), (2) $\stackrel{(+)}{\Rightarrow} ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2ΒΛ^2 + 2ΒΛ^2 + ΓΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2(ΒΛ^2 + ΒΛ^2) + ΓΔ^2 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow}$

$ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2\left(2ΚΛ^2 + \frac{ΑΒ^2}{2}\right) + ΓΔ^2 \Leftrightarrow$

$ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 4ΚΛ^2 + ΑΒ^2 + ΓΔ^2 \Leftrightarrow$

$4ΚΛ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 - ΑΒ^2 - ΓΔ^2$



β) Έστω Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, ΒΓ, ΑΔ, ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα.

Ισχύουν :

$$4ΚΛ^2 = ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 - ΑΒ^2 - ΓΔ^2 \quad (4)$$

$$4ΡΣ^2 = ΑΒ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΓΔ^2 - ΑΓ^2 - ΒΔ^2 \quad (5)$$

$$4ΜΝ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + ΓΔ^2 + ΒΔ^2 - ΒΓ^2 - ΑΔ^2 \quad (6)$$

$$\text{σφαίρα}(ΑΒ) \perp \text{σφαίρα}(ΓΔ) \Leftrightarrow ΚΛ^2 = \frac{ΑΒ^2}{4} + \frac{ΓΔ^2}{4} \Leftrightarrow 4ΚΛ^2 = ΑΒ^2 + ΓΔ^2 \quad (7)$$

$$\text{σφαίρα}(ΑΓ) \perp \text{σφαίρα}(ΒΔ) \Leftrightarrow ΡΣ^2 = \frac{ΑΓ^2}{4} + \frac{ΒΔ^2}{4} \Leftrightarrow 4ΡΣ^2 = ΑΓ^2 + ΒΔ^2 \quad (8)$$

$$(4), (7) \Rightarrow ΑΓ^2 + ΑΔ^2 + ΒΓ^2 + ΒΔ^2 = 2ΑΒ^2 + 2ΓΔ^2 \quad (9)$$

$$(5), (8) \Rightarrow ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + ΓΔ^2 + ΒΔ^2 = 2ΒΓ^2 + 2ΑΔ^2 \quad (10)$$

$$(9), (10) \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 2ΑΔ^2 + 2ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + ΒΔ^2 + ΓΔ^2 \Leftrightarrow$$

$$ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2 + ΒΔ^2 + ΓΔ^2 - ΑΔ^2 - ΒΓ^2 \stackrel{(6)}{\Leftrightarrow}$$

$$ΑΔ^2 + ΒΓ^2 = 4ΜΝ^2 \Leftrightarrow$$

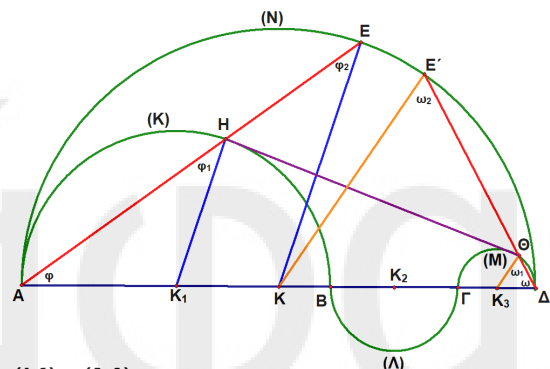
$$ΜΝ^2 = \frac{ΑΔ^2}{4} + \frac{ΒΓ^2}{4} \Leftrightarrow$$

σφαίρα(ΑΔ) $\perp$ σφαίρα(ΒΓ)

Ζήτημα 3^ο

α) Έστω ότι :

- K_1 μέσο του ΑΒ
- K_2 μέσο του ΒΓ
- K_3 μέσο του ΓΔ
- Κ μέσο του ΑΔ
- ΗΘ το κοινό εφαπτόμενο τμήμα των (Κ), (Μ)



Φέρνουμε την ΑΗ και η προέκτασή της τέμνει το ημικύκλιο (Μ) στο Ε.

Όμοια η προέκταση της ΔΘ τέμνει το ημικύκλιο (Μ) στο Ε'.

Τα $\triangle AHK_1$, $\triangle AEK$ είναι ισοσκελή, άρα $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}$, άρα $HK_1 \parallel EK$ και επειδή $HK_1 \perp H\Theta$, θα είναι $EK \perp H\Theta$ (1)

Όμοια τα $\triangle \Theta K_3$, $\triangle E'K$ είναι ισοσκελή, άρα $\hat{\omega}_1 = \hat{\omega}_2 = \hat{\omega}$, άρα $\Theta K_3 \parallel E'K$ και επειδή $\Theta K_3 \perp H\Theta$, θα είναι $E'K \perp H\Theta$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε ότι $E \equiv E'$.

Εργαζόμαστε ομοίως και οι προεκτάσεις των ΗΒ και ΘΓ τέμνονται στο σημείο Ζ του ημικυκλίου (Λ).

Θα δείξουμε ότι τα σημεία E και Z ανήκουν στον ριζικό άξονα των κύκλων με διαμέτρους AB, ΓΔ.

Τα $\overset{\Delta}{E}\overset{\Delta}{O}H$ και $\overset{\Delta}{E}\overset{\Delta}{A}\overset{\Delta}{D}$ είναι όμοια αφού έχουν $\hat{E} = 90^\circ$ (κοινή) και $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_2 = 90^\circ - \hat{\omega}_2 = \hat{\varphi}_3$

Άρα $\frac{EO}{EA} = \frac{EH}{ED} \Rightarrow EA \cdot EH = EO \cdot ED$, δηλαδή

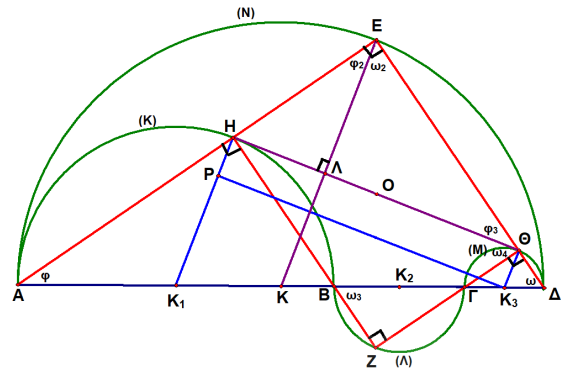
το σημείο E ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων με διαμέτρους AB, ΓΔ.

Όμοια $\overset{\Delta}{Z}\overset{\Delta}{O}H \approx \overset{\Delta}{Z}\overset{\Delta}{G}B$, αφού $\hat{Z} = 90^\circ$ (κοινή) και $\hat{\omega}_3 = \hat{\omega}_4$

άρα $\frac{ZO}{ZG} = \frac{ZH}{ZD} \Rightarrow ZG \cdot ZH = ZO \cdot ZD$, δηλαδή

το σημείο Z ανήκει στον ριζικό άξονα των κύκλων με διαμέτρους AB, ΓΔ.

Το τετράπλευρο EHZΘ είναι ορθογώνιο διότι έχει 4 ορθές γωνίες.



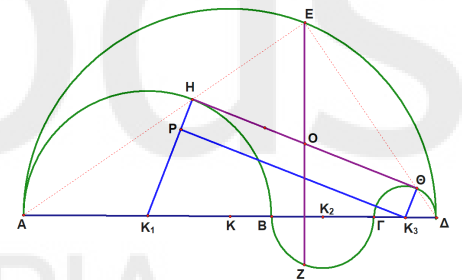
β) $EZ = H\Theta$ (οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες).

Φέρνω $K_3P \perp HK_1$, άρα $EZ = H\Theta = K_3P$

Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{K_1}K_3P$: $K_3P^2 = K_1K_3^2 - K_1P^2 \Rightarrow$

$$K_3P^2 = (\alpha + 2\beta + \gamma)^2 - (\alpha - \gamma)^2 = \alpha^2 + 4\beta^2 + \gamma^2 + 4\alpha\beta + 4\beta\gamma + 2\alpha\gamma - \alpha^2 + 2\alpha\gamma - \gamma^2 \\ = 4\beta^2 + 4\alpha\beta + 4\beta\gamma + 4\alpha\gamma = 4\beta(\beta + \alpha) + 4\gamma(\beta + \alpha) = 4(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma)$$

$$E_{\text{κυκλ}(EZ)} = \pi \left(\frac{EZ}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \pi \cdot EZ^2 \\ = \frac{1}{4} \pi \cdot 4(\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) = \pi \cdot (\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma)$$



$$E_{\text{γραμ}} = E_{(N)} - E_{(K)} + E_{(Λ)} - E_{(M)} \\ = \frac{1}{2} \pi (\alpha + \beta + \gamma)^2 - \frac{1}{2} \pi \alpha^2 + \frac{1}{2} \pi \beta^2 - \frac{1}{2} \pi \gamma^2 = \frac{1}{2} \pi [(\alpha + \beta + \gamma)^2 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2] \\ = \frac{1}{2} \pi (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) \\ = \frac{1}{2} \pi (2\beta^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\alpha\gamma) \\ = \frac{1}{2} \pi \cdot 2 \cdot (\alpha + \beta) \cdot (\beta + \gamma) \\ = E_{\text{κυκλ}(EZ)}$$

