ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΦΥΣΙΚΟΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Δευτέρα 7 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1^{ο}

Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ.Νικολάου (εκδ.1965) σελίδες 196-197

§ 226. *Πρόβλημα II.* **Δίδονται δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα μ, ν καὶ ὁρίζονται εἰς ἓν ἐπίπεδον δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ὁρισθῇ καὶ νὰ γραφῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι ΜΑ : ΜΒ = μ : ν** (σχ. 166).

Λύσις. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἂν ΜΔ, ΜΕ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώ- ΑΜΒ, θὰ εἶναι :

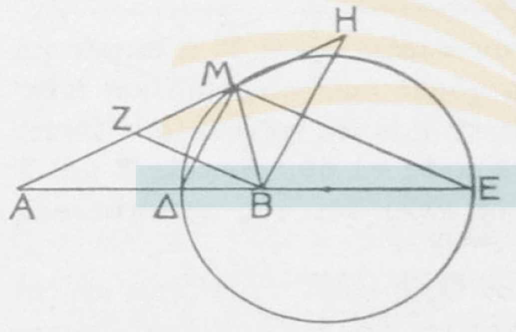
ΔΑ : ΔΒ = ΜΑ : ΜΒ = μ : ν καὶ

ΕΑ : ΕΒ = ΜΑ : ΜΒ = μ : ν.

Ἑπομένως :

ΔΑ : ΔΒ = ΕΑ : ΕΒ = μ : ν, τὰ δὲ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι ἁρμονικὰ συζυγῆ πρὸς τὰ Α καὶ Β.

Ἐκ τούτων τὸ Δ ὁρίζομεν καὶ ἀρχικῶς, ἂν διαιρέσωμεν τὸ δοθὲν τμῆμα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ μ καὶ ν (§ 219). Μετὰ τοῦτο δὲ ὁρίζομεν καὶ τὸ Ε (§ 224).



Σχ. 166

Ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ εἶναι τελείως ὡρισμένον κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος.

Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΔΜΕ}$ = 1 ὀρθ., τὸ Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον ΔΕ καὶ γράφεται εὐκόλως.

Ἂν δὲ Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΒΖ, ΒΗ ἀντιστοίχως παραλλήλους πρὸς τὰς ΜΕ, ΜΔ, θὰ εἶναι $\widehat{ΖΒΗ} = \widehat{ΔΜΕ}$ = 1 ὀρθ. καὶ

μ : ν = ΑΔ : ΔΒ = ΑΜ : ΜΗ

μ : ν = ΕΑ : ΕΒ = ΑΜ : ΜΖ (1)

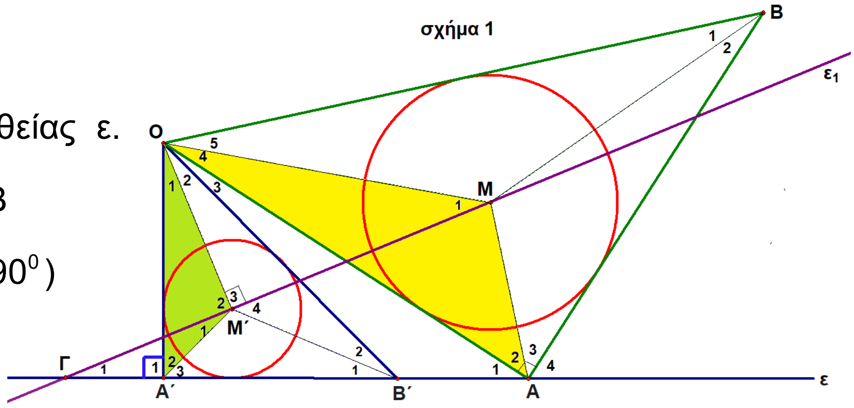
Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ΜΖ = ΜΗ, ἡ δὲ ΒΜ εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΖΒΗ καὶ διὰ τοῦτο ΒΜ = ΜΗ (§ 127 Πόρ ΙΙΙ).

Ἡ α' λοιπὸν τῶν ἰσοτήτων (1) γίνεται μ : ν = ΑΜ : ΒΜ, ἤτοι τὸ Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι :

Ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΕ.

Τοῦτο δὲ ὁρίζομεν, ὅπως προηγουμένως εἴπομεν.

Ζήτημα 2ο



Έστω Α τυχαίο σημείο της ευθείας ε.

Σχηματίζουμε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{OAB}$

που είναι ορθογώνιο ($\overset{\Delta}{OAB} = 90^0$)

και ισοσκελές (ΟΑ = ΑΒ)

και τα Ο, Α, Β να ορίζουν

τη θετική φορά στο επίπεδο (σχ.1).

ΜΑ, ΜΟ και ΜΒ διχοτόμοι των $\overset{\wedge}{OAB}$, $\overset{\wedge}{AOB}$ και $\overset{\wedge}{OBA}$ αντίστοιχα

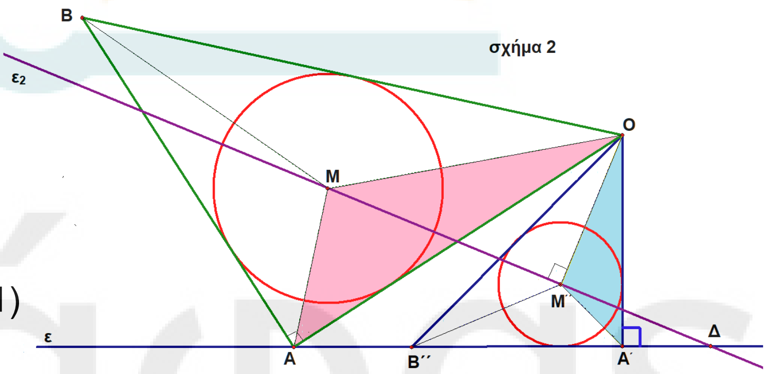
και Μ το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο $\overset{\Delta}{OAB}$.

Όμοια για το σταθερό σημείο Α΄ τέτοιο ώστε ΟΑ΄ $\perp$ ε, σχηματίζουμε το

ορθογώνιο και ισοσκελές $\overset{\Delta}{OA'B'}$ και

Μ΄ το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου στο $\overset{\Delta}{OA'B'}$.

$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_4 = \hat{O}_5 = \dfrac{45^0}{2} = 22{,}5^0$



$\hat{A}'_2 = \hat{A}'_3 = \hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \dfrac{90^0}{2} = 45^0$

Είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_4$ και $\hat{A}'_2 = \hat{A}_2$,

άρα $\overset{\Delta}{OA'M'} \approx \overset{\Delta}{OAM}$ και $\dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{OA'}{OA}$ (1)

$$\left.\begin{aligned} \hat{O}_{1,2,3} &= \hat{O}_1 + \hat{O}_2 + \hat{O}_3 = 45^0 + \hat{O}_3 \\ \hat{O}_{3,4,5} &= \hat{O}_3 + \hat{O}_4 + \hat{O}_5 = 45^0 + \hat{O}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{O}_{1,2,3} = \hat{O}_{3,4,5} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε $\overset{\Delta}{OAA'} \approx \overset{\Delta}{OMM'}$, άρα $\hat{M}_3 = \hat{A}_{2,3} = 90^0$.

Επομένως **το Μ κινείται στην ευθεία ε_1 που διέρχεται από το Μ΄ και $\varepsilon_1 \perp$ ΟΜ΄**.

$$\left.\begin{aligned} \overset{\Delta}{OMM'}&: \hat{M}_1 = 180^0 - (\hat{M}'_3 + \hat{O}_{2,3,4}) = 45^0 - \hat{O}_3 \\ \overset{\Delta}{OAA'}&: \hat{A}_1 = 180^0 - (\hat{A}'_{2,3} + \hat{O}_{1,2,3}) = 45^0 - \hat{O}_3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A}_1$$

άρα το τετράπλευρο ΟΓΜΑ είναι εγγράψιμο και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{O}_4 = 22{,}5^0$

δηλαδή **η ε_1 σχηματίζει με την ε γωνία $22{,}5^0$**.

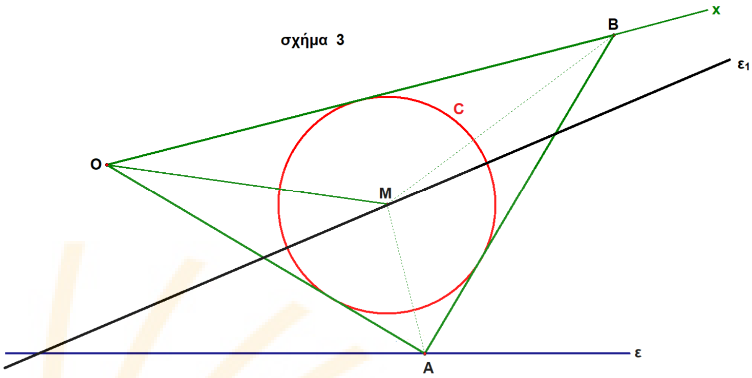
Όμοια, αν τα Ο, Α και Β ορίζουν την αρνητική φορά στο επίπεδο (σχ.2),

το Μ κινείται σε ευθεία ε_2 η οποία σχηματίζει με την ε γωνία $22{,}5^0$.

Αντίστροφα

Έστω M τυχαίο σημείο της ευθείας ε_1 (όμοια αν M σημείο της ε_2).

Φέρνουμε το τμήμα OM και κατασκευάζουμε εκατέρωθεν αυτού γωνίες $M\hat{O}A = M\hat{O}x = 22{,}5^0$ (A σημείο της ευθείας ε) (σχ.3).



Από το M γράφουμε κύκλο C που εφάπτεται στις OA και OB.

Από το A φέρνουμε την εφαπτόμενη στον κύκλο C, η οποία τέμνει την ημιευθεία Ox στο σημείο B.

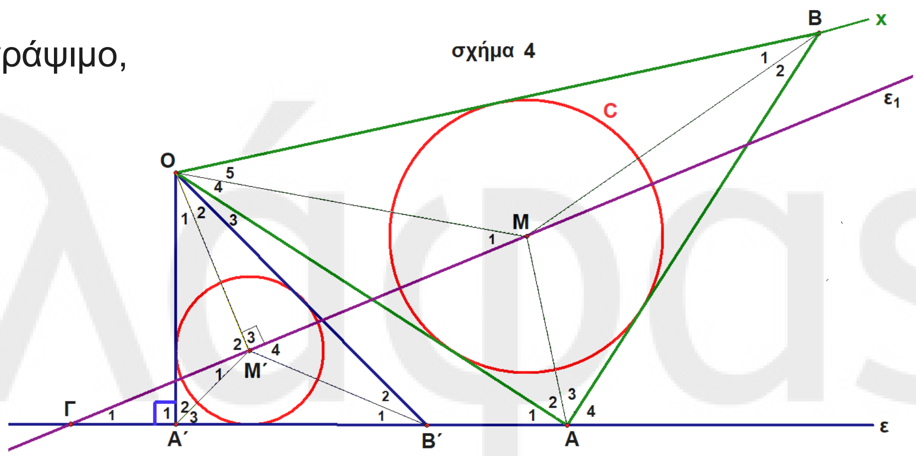
Αρκεί να δείξουμε ότι $O\hat{A}B = 90^0$.

Σχηματίζουμε ξανά το $\overset{\Delta}{OA'B'}$ (σχ.4) και έχουμε :

$\hat{O}_4 = \hat{\Gamma}_1 = 22{,}5^0$

άρα το $OMA\Gamma$ είναι εγγράψιμο,

άρα $\hat{M}_1 = \hat{A}_1$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{M}_1 = \hat{A}_1 \\ \hat{M}'_3 = \hat{A}'_{2,3} = 90^0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

άρα $O\hat{M}M' \approx O\hat{A}A'$

άρα $\dfrac{OM'}{OA'} = \dfrac{OM}{OA}$

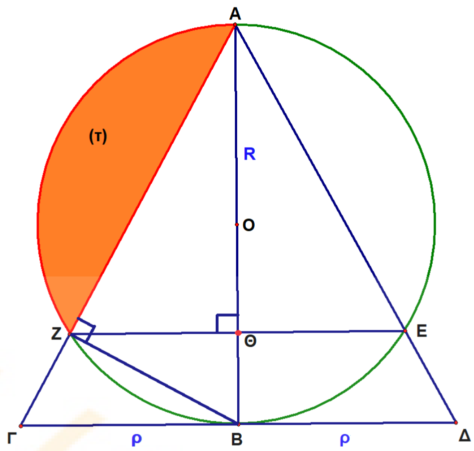
Είναι $\hat{O}_1 = \hat{O}_4 = 22{,}5^0$ και $\dfrac{OM'}{OM} = \dfrac{OA'}{OA}$, άρα $O\hat{M'}A' \approx O\hat{M}A$

άρα $\hat{A}_2 = \hat{A}'_2 = 45^0$ και

$\hat{A}_{2,3} = 2\hat{A}_2 = 90^0$ άρα $O\hat{A}B = 90^0$.

Επομένως $\boxed{\textbf{ο ζητούμενος γ.τ. είναι οι ευθείες } \varepsilon_1 \textbf{ και } \varepsilon_2}$.

Ζήτημα 3°



Έστω R η ακτίνα της σφαίρας με διάμετρο AB και ρ η ακτίνα της βάσης του κώνου $A\Gamma\Delta$.
Το κυκλικό τμήμα (τ) αν περιστραφεί περί την AB θα δώσει σφαιρικό δακτύλιο με όγκο $V_\delta = \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot AZ^2\cdot A\Theta$ (1)

Στο ορθογώνιο $\overset{\Delta}{AZB}$ είναι :

$AZ^2 = AB\cdot A\Theta \Leftrightarrow AZ^2 = 2R\cdot A\Theta$ (2)

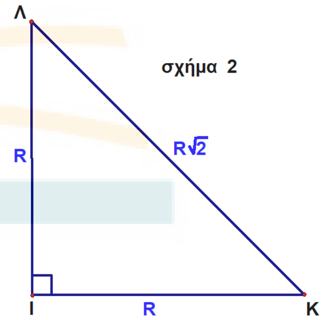
Από (1) και (2) έχουμε $V_\delta = \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 2R\cdot A\Theta^2 \Leftrightarrow V_\delta = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot R\cdot A\Theta^2$ (3)

Θα πρέπει $V_\delta = \frac{1}{2}\cdot V_{\sigma\varphi} \overset{(3)}{\Rightarrow}$

$\frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{\pi}\cdot R\cdot A\Theta^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{\cancel{3}}\cdot\cancel{\pi}\cdot R^3 \Leftrightarrow$

$A\Theta^2 = 2R^2$ ή $A\Theta = R\sqrt{2}$ (4)

$(2) \overset{(4)}{\Rightarrow} AZ^2 = 2\sqrt{2}\cdot R^2$ (5)

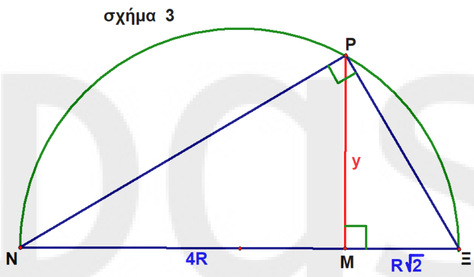


Πυθαγόρειο Θεώρημα στο $\overset{\Delta}{AZ\Theta}$:

$Z\Theta^2 = AZ^2 - A\Theta^2 \underset{(5)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}} Z\Theta^2 = 2\sqrt{2}\cdot R^2 - 2R^2 \Leftrightarrow$

$Z\Theta^2 = 2\cdot(\sqrt{2} - 1)\cdot R^2 \Leftrightarrow$

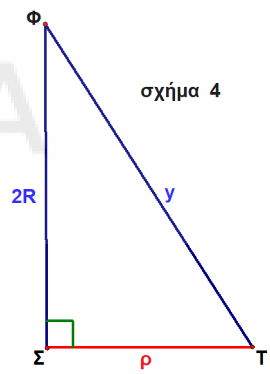
$Z\Theta = R\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ (6)



Είναι $\overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A\Theta Z}$, άρα $\frac{B\Gamma}{Z\Theta} = \frac{AB}{A\Theta} \underset{(6)}{\overset{(4)}{\Rightarrow}}$

$\frac{\rho}{R\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{2} - 1}} = \frac{2\cdot\cancel{R}}{\cancel{\sqrt{2}}\cdot\cancel{R}} \Leftrightarrow \boxed{\rho = 2R\cdot\sqrt{\sqrt{2} - 1}}$

ή $\rho^2 = 4R^2(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow \rho^2 = 4\sqrt{2}\cdot R^2 - 4R^2$



Κατασκευή του ρ

- Κατασκευάζουμε τμήμα $K\Lambda = \sqrt{2}\cdot R$ (σχήμα 2)
- Κατασκευάζουμε τμήμα $MP = y$, με $y^2 = 4\sqrt{2}\cdot R^2$ (σχήμα 3)
- Κατασκευάζουμε τμήμα $\Sigma T = \rho$, με $\rho^2 = y^2 - 4R^2$ (σχήμα 4)