

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1970
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΓΕΩΠΟΝΟΔΑΣΟΛΟΓΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ
Τετάρτη 2 Σεπτεμβρίου 1970

Ζήτημα 1^ο

Σχολικό βιβλίο Θεωρητική γεωμετρία του Ν.Δ.Νικολάου (εκδ.1965) σελίδες 163-164

§ 191. *Θεώρημα.* "Αν μία γωνία τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική μιᾶς γωνίας ἄλλου τριγώνου, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων τούτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι περιέχουσι τὰς γωνίας ταύτας.

Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ , εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι :

$$\widehat{A} = \widehat{\Delta} \text{ (σχ. 145 α')} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2 \text{ ὀρθ. (σχ. 145 β')}. \quad \text{Λέγω ὅτι:}$$

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{(AB) \cdot (A\Gamma)}{(\Delta E) \cdot (\Delta Z)}$$

Ἀπόδειξις: α') Θέτομεν τὸ τρίγωνον ΔEZ εἰς τὴν θέσιν $AE'Z'$ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς A (σχ. 145α') καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν BZ' .

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ ABZ' ἔχουσι κοινὸν ὕψος τὴν ἀπόστασιν τῆς κορυφῆς B ἀπὸ τῆς $A\Gamma$, θὰ εἶναι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(ABZ')} = \frac{(A\Gamma)}{(AZ')} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὰ ABZ' , $AE'Z'$ εἶναι ἰσοῦψῃ, ἔπεται ὅτι

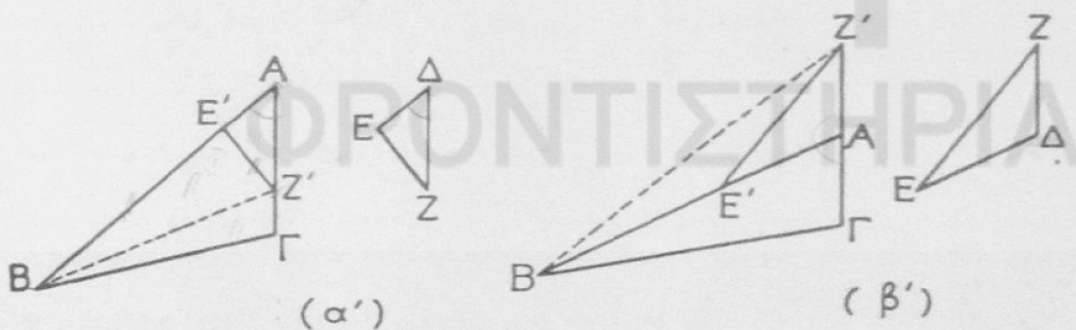
$$\frac{(ABZ')}{(AE'Z')} = \frac{(AB)}{(AE')} \quad (2)$$

"Αν πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), εὐρίσκομεν ὅτι

$$\frac{(AB\Gamma)}{(AE'Z')} = \frac{(AB) \cdot (A\Gamma)}{(AE') \cdot (AZ')} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ δὲ $AE' = \Delta E$, $AZ' = \Delta Z$ καὶ $(AE'Z') = (\Delta EZ)$, ἡ ἰσότης (3) γίνεται $\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta EZ)} = \frac{(AB) \cdot (A\Gamma)}{(\Delta E) \cdot (\Delta Z)}$. ὁ.ἔ.δ.

β') Ἄν $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2$ ὀρθ. τὸ τρίγωνον ΔEZ τίθεται εἰς τὴν θέσιν



Σχ. 145

$AE'Z'$ (σχ. 145 β') οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Δ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς A . Μετὰ ταῦτα δὲ ἐξακολουθοῦμεν, ὅπως προηγουμένως.

Ζήτημα 2°

Οι κύκλοι K_1 , K_2 και K_3 είναι ίσοι.

Έστω ότι ρ είναι η ακτίνα του κύκλου K και r η ακτίνα των κύκλων K_1 , K_2 και K_3 .

Στο ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ πλευράς α :

- το AL είναι διάμεσος και ύψος,
- το K είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου

$$\text{άρα } AL = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{και } KL = KZ = AZ = \frac{1}{3}AL = \rho = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} \quad (1)$$

Στο ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle A\Delta E$:

- το AZ είναι διάμεσος και ύψος,
- $AZ = \rho = \frac{\alpha\sqrt{3}}{6}$,
- το K_1 είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου

$$\text{άρα } K_1Z = \frac{1}{3} \cdot AZ = \frac{1}{3} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{6} = r = \frac{\alpha\sqrt{3}}{18} \quad (2)$$

μήκος περιφέρειας κύκλου K : $2\pi\rho$

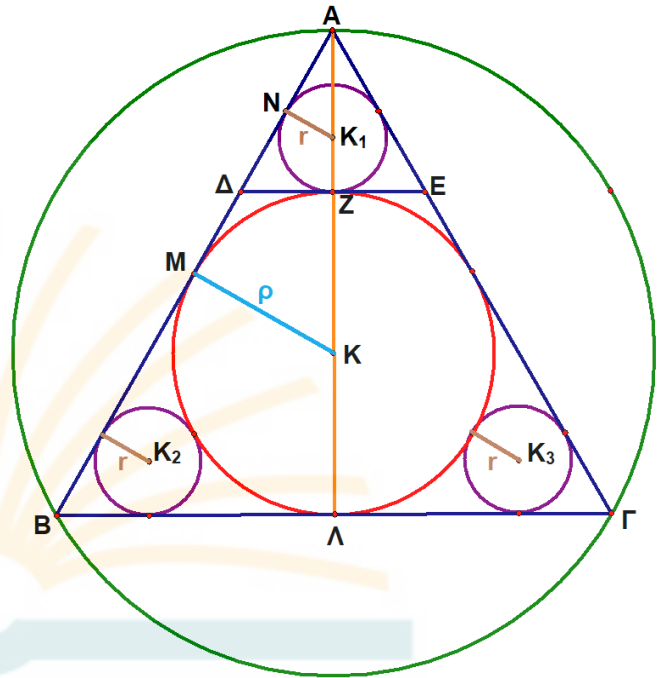
μήκος περιφέρειας κύκλου K_1 : $2\pi r$

μήκος περιφέρειας κύκλου K_2 : $2\pi r$

μήκος περιφέρειας κύκλου K_3 : $2\pi r$

$$\text{Αρκεί να δείξουμε ότι } 2\pi\rho = 2\pi r + 2\pi r + 2\pi r \Leftrightarrow \rho = 3r \begin{matrix} (1) \\ \Leftrightarrow \\ (2) \end{matrix}$$

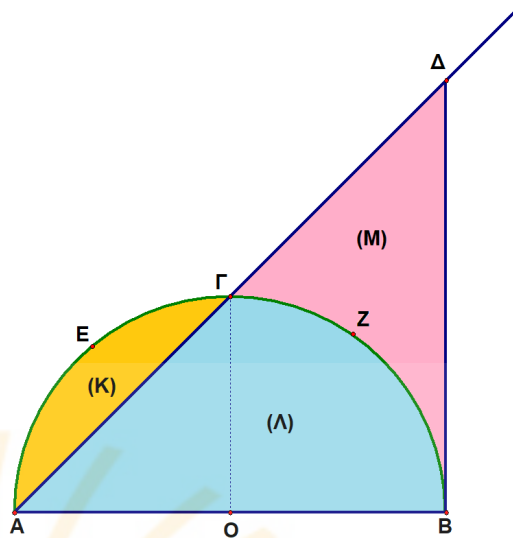
$$\frac{\alpha\sqrt{3}}{6} = 3 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{18} \quad \text{που ισχύει}$$



Ζήτημα 3^ο

Έστω ρ η ακτίνα του ημικυκλίου.

Τα $\triangle O\hat{\Gamma}A$ και $\triangle B\hat{A}\Delta$ είναι
ορθογώνια και ισοσκελή
άρα $OA = OG = \rho$ και
 $AB = B\Delta = 2\rho$



$K : (A\hat{E}G\hat{A})$
 $\Lambda : (A\hat{B}Z\hat{G}A)$
 $M : (G\hat{\Delta}B\hat{Z}G)$

$$V(K) = V_{\text{ημισφαίριου}(O\hat{A}E\hat{G}O)} - V_{\text{κώνου}(O\hat{A}G)} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho^3}{2} - \frac{1}{3}\pi\rho^2 \cdot \rho = \frac{2}{3}\pi\rho^3 - \frac{1}{3}\pi\rho^3 = \frac{1}{3}\pi\rho^3 \quad (1)$$

$$V(\Lambda) = V_{\text{σφαίρας}} - V(K) = \frac{4}{3}\pi\rho^3 - \frac{1}{3}\pi\rho^3 = \pi\rho^3 \quad (2)$$

$$V(M) = V_{\text{κώνου}(A\hat{B}\Delta)} - V(\Lambda) = \frac{1}{3}\pi(2\rho)^3 - \pi\rho^3 = \frac{8}{3}\pi\rho^3 - \pi\rho^3 = \frac{5}{3}\pi\rho^3 \quad (3)$$

$$\text{Από (1), (2), (3)} \Rightarrow \frac{V(K)}{1} = \frac{V(\Lambda)}{3} = \frac{V(M)}{5} = \frac{1}{3}\pi\rho^3$$

Επομένως οι γραφόμενοι από τα χωρία K, Λ, M όγκοι είναι ανάλογοι των αριθμών 1, 3 και 5.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ