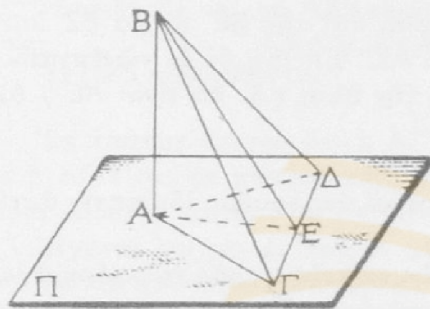


ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΙΣΙΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1969
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ
ΤΕΧΝΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Παρασκευή 12 Σεπτεμβρίου 1969
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ζήτημα 1^ο

§ 284. *Θεώρημα I.* Εὐθεΐα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι τυχούσα εὐθεΐα αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ ποδὸς A ἄγεται εὐθεΐα AE κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν $\Gamma\Delta$ καὶ τέμνουσα αὐτὴν εἰς τὸ E . Ἄν B εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς AB , ἡ BE εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ (σχ. 207).



Σχ. 207

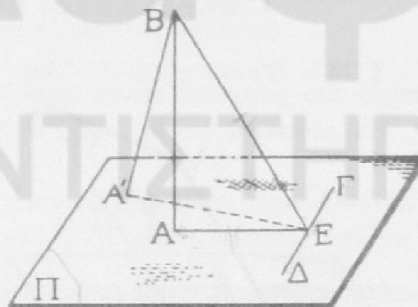
Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ ὀρίζομεν δύο ἴσα τμήματα $ΕΓ$, $ΕΔ$ καὶ ἄγομεν τὰς εὐθεΐας $BΓ$, $BΔ$, $AΓ$, $AΔ$. Τὸ τμήμα λοιπὸν $\Gamma\Delta$ τέμνεται δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς AE καὶ διὰ τοῦτο εἶναι $AΓ = AΔ$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $BΓ = BΔ$, ἡ δὲ διάμεσος BE τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $BΓΔ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, ὁ.ἔ.δ.

§ 285. *Θεώρημα II.* Ἐκ τοῦ σημείου B ἐκτὸς ἐπιπέδου Π κειμένου ἄγεται εὐθεΐα BA κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ἄλλη BE κάθετος ἐπὶ εὐθεΐαν $\Gamma\Delta$ τοῦ Π . Ἡ εὐθεΐα AE , τὴν ὁποίαν ὀρίζουσιν οἱ πόδες τῶν καθέτων τούτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$ (σχ. 107).

Ἀπόδειξις. Ὀρίζομεν, ὡς προηγουμένως $ΕΓ = ΕΔ$ καὶ συμπεραίνομεν ὅτι $BΓ = BΔ$. Ἐκ ταύτης δὲ συμπεραίνομεν ὅτι $AΓ = AΔ$ καὶ προχωροῦμεν ὡς προηγουμένως.

§ 286. *Θεώρημα III.* Ἐκ σημείου E εὐθείας $\Gamma\Delta$ ἄγονται εὐθεΐαι EB , EA κάθετοι ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$. Ἐκ σημείου δὲ B τῆς EB ἄγεται εὐθεΐα BA κάθετος ἐπὶ τὴν EA . Ἡ BA εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν AE καὶ $\Gamma\Delta$ (σχ. 208).



Σχ. 208

Ἀπόδειξις. Ἄν ἡ BA ἦτο πλαγία πρὸς τὸ Π , θὰ ἦγετο ἐκ τοῦ B ἄλλη εὐθεΐα BA' κάθετος ἐπὶ τὸ Π . Ὁ δὲ πούς A' αὐτῆς θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς AE , διότι ἄλλως θὰ ἦγοντο ἐκ τοῦ B δύο εὐθεΐαι BA , BA' κάθετοι ἐπὶ τὴν EA καὶ ἐν τῷ αὐτῷ μετ' αὐτῆς ἐπιπέδῳ AEB . Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ἡ EA' θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, θὰ ἦγοντο ἐκ τοῦ E καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ Π δύο κάθετοι ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$. Τοῦτο δὲ εἶναι ἀδύνατον. Εἶναι λοιπὸν ἡ BA κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ζήτημα 2°

Αν O το κέντρο του παραλληλογράμμου το

$\triangle AOB$ είναι κατασκευάσιμο, αφού

γνωρίζουμε τις πλευρές $AB = \alpha$, $AO = \frac{\beta}{2}$

και η γωνία $\angle AOB = \omega$.

Κατασκευή

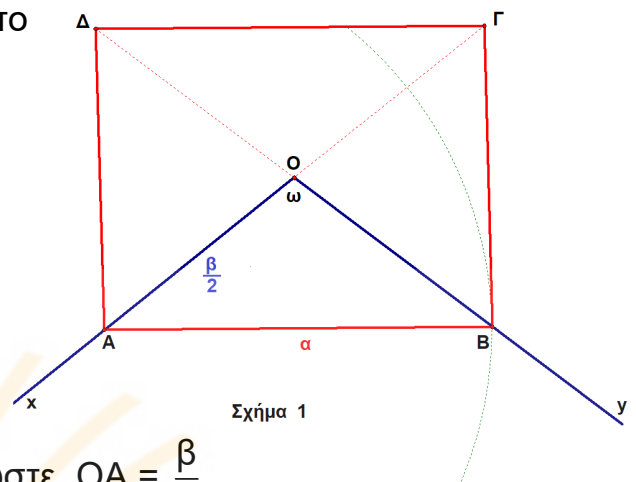
Σχηματίζουμε γωνία $\angle xOy = \omega$.

Στην πλευρά Ox παίρνουμε σημείο A , ώστε $OA = \frac{\beta}{2}$.

Με κέντρο A και ακτίνα α γράφουμε κύκλο

- Αν $\alpha > \frac{\beta}{2}$ (σχ.1) ο κύκλος τέμνει την πλευρά Oy στο B .

Τα σημεία Γ, Δ είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των A και B ως προς το O .

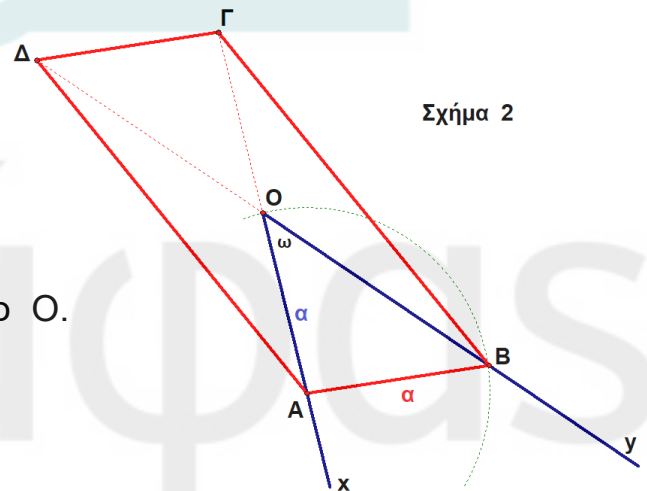


Σχήμα 1

- Αν $\alpha = \frac{\beta}{2}$ (σχ.2)

Ο κύκλος τέμνει την πλευρά Oy στο σημείο B και διέρχεται από το O .

Τα σημεία Γ, Δ είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των A και B ως προς το O .



Σχήμα 2

- Αν $\alpha < \frac{\beta}{2}$ (σχ.3)

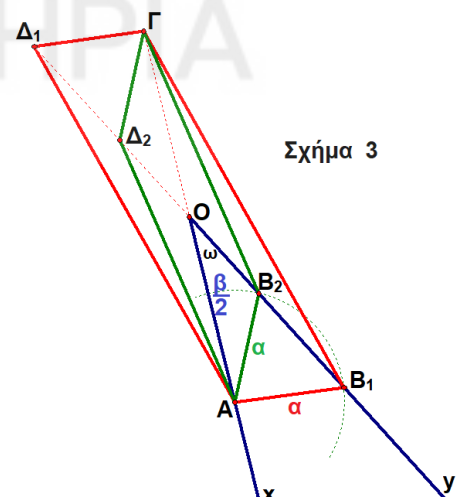
Ο κύκλος τέμνει την πλευρά Oy στα σημεία B_1 και B_2 .

Τα σημεία $\Gamma, \Delta_1, \Delta_2$ είναι αντίστοιχα τα συμμετρικά των A, B_1 και B_2

ως προς το σημείο O .

Έχουμε δύο λύσεις :

τα παραλληλόγραμμα $AB_1\Gamma\Delta_1$ και $AB_2\Gamma\Delta_2$



Σχήμα 3

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

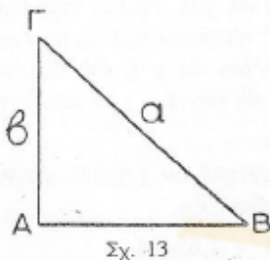
Ζήτημα 1°

Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν αὐτοῦ.

Ἡ ἐφαπτομένη γωνίας Β σημειώνεται οὕτω: $\epsilon\phi B$.

Εἶναι λοιπὸν $\epsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{BA}$. Ὀμοίως $\epsilon\phi \Gamma = \frac{BA}{A\Gamma}$.

Δύο ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξείων γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. Ἐκ τῶν γνωστῶν



Σχ. 13

$$\begin{aligned} \text{ἰσοτήτων } \epsilon\phi B &= \frac{A\Gamma}{BA} = \frac{\beta}{\gamma}, \quad \epsilon\phi \Gamma = \frac{BA}{A\Gamma} \\ &= \frac{\gamma}{\beta} \text{ εὐρίσκομεν ὅτι} \end{aligned}$$

$$\beta = \gamma \epsilon\phi B$$

$$\gamma = \beta \epsilon\phi \Gamma$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι :

Ἐκάστη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς εἰς ἐκείνην ἀντικειμένης ὀξείας γωνίας αὐτοῦ.

Συνημίτονον ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ὑποτείνουσάν.

Τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας Β σημειώνομεν οὕτω: $\sigma\upsilon\nu B$.

Εἶναι λοιπὸν: $\sigma\upsilon\nu B = \frac{BA}{B\Gamma}$.

Συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου λέγεται ὁ λόγος τῆς καθέτου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου, εἰς τὴν ὁποίαν πρόσκειται ἡ γωνία αὕτη, πρὸς τὴν ἀπέναντι αὐτῆς κάθετον πλευρὰν.

Εἶναι λοιπὸν $\sigma\phi B = \frac{BA}{A\Gamma}$. Ὀμοίως $\sigma\phi \Gamma = \frac{A\Gamma}{BA}$.

Ἄλλαι σχέσεις μεταξὺ τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ὀξείων γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ABΓ. Ἐπειδὴ $B + \Gamma = 90^\circ$, ἔπεται ὅτι:

$$\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu \Gamma, \quad \eta\mu \Gamma = \sigma\upsilon\nu B, \quad \epsilon\phi B = \sigma\phi \Gamma, \quad \epsilon\phi \Gamma = \sigma\phi B.$$

Ἐνεκα τούτου αἱ γνωσταὶ (§ 19) σχέσεις:

$$\beta = \alpha \eta\mu B, \quad \gamma = \alpha \eta\mu \Gamma$$

$$\text{γίνονται:} \quad \beta = \alpha \sigma\upsilon\nu \Gamma, \quad \gamma = \alpha \sigma\upsilon\nu B$$

Ἐξ ὅλων τούτων βλέπομεν ὅτι:

α') Ἐκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ὑποτείνουσας ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ὀξείας γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.

Ὀμοίως αἱ γνωσταὶ (§ 31) σχέσεις:

$$\beta = \gamma \epsilon\phi B, \quad \gamma = \beta \epsilon\phi \Gamma$$

$$\text{γίνονται:} \quad \beta = \gamma \sigma\phi \Gamma, \quad \gamma = \beta \sigma\phi B$$

Ἐξ ὅλων δὲ τούτων βλέπομεν ὅτι:

β') Ἐκάστη κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι γινόμενον τῆς ἄλλης ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι ἢ ἐπὶ τὴν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης εἰς ἐκείνην ὀξείας γωνίας.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \sigma\upsilon\nu B \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \eta\mu B \cdot \eta\mu \Gamma = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot \eta\mu \Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \\ &= \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \sigma\upsilon\nu B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu B = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu \Gamma \end{aligned}$$

Ζήτημα 2°

Για $\alpha \neq 360^\circ \cdot \kappa \pm 90^\circ$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ έχουμε :

$$\begin{aligned} & \frac{(\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha) \cdot (1 + \sigma\upsilon\nu\alpha) + (1 + \eta\mu\alpha)^2 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \eta\mu\alpha)} = \\ &= \frac{\cancel{\eta\mu\alpha} + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + \textcolor{red}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + 1 + 2\eta\mu\alpha + \textcolor{red}{\eta\mu^2\alpha} - \cancel{\eta\mu\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \eta\mu\alpha)} \\ &= \frac{\textcolor{red}{2} + 2\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \eta\mu\alpha)} \\ &= \frac{2 \cdot (1 + \eta\mu\alpha) + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot (1 + \eta\mu\alpha)} \\ &= \frac{\cancel{(1 + \eta\mu\alpha)} \cdot (2 + \sigma\upsilon\nu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \cancel{(1 + \eta\mu\alpha)}} \\ &= \frac{2 + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}. \end{aligned}$$

Κελλάφας

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ